ΟΥΡΕΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ – ΙΟΥΝΙΟΣ 2008

Θέμα 1ο (3 βαθμοί): Θεωρούμε την τροποποίηση της M/M/1 ουράς με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ και εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ, με αποθαρρυνόμενους πελάτες και μεταβλητό ρυθμό εξυπηρέτησης. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι ένας πελάτης που βρίσκει n άτομα στο σύστημα αναχωρεί άμεσα από το σύστημα (χωρίς να εξυπηρετηθεί) με πιθανότητα $1-\alpha^n$, $n=0,1,2,\ldots$ (όπου $\alpha \in (0,1)$ σταθερά). Επιπλέον η ταχύτητα του υπηρέτη όταν υπάρχουν n άτομα στο σύστημα είναι $n\alpha^{n-1}$ (δηλαδή ο ρυθμός αναχώρησης είναι $\mu n\alpha^{n-1}$), $n=1,2,\ldots$.

(α) Πότε το σύστημα είναι ευσταθές (στάσιμο); Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών στο σύστημα $\{Q(t)\}$, όταν είναι ευσταθές. (1 βαθμός)

(β) Να βρεθούν οι οριακές κατανομές $(r_n^{\pi\rho\alpha\gamma\mu})$ και $(d_n^{\pi\rho\alpha\gamma\mu})$ των εμφυτευμένων διαδικασιών του αριθμού των πελατών σε στιγμές πραγματικών αφίξεων και πραγματικών αναχωρήσεων αντίστοιχα (δηλαδή λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους πελάτες που εισέρχονται στο σύστημα και εξυπηρετούνται). (1 βαθμός)

(γ) Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο ποσοστό των χαμένων πελατών του συστήματος. ($\frac{1}{2}$ βαθμός)

(δ) Να βρεθεί ο μέσος κύκλος απασχόλησης του συστήματος. ($\frac{1}{2}$ βαθμός)

Θέμα 2ο (4 βαθμοί): Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/2$ ουράς με ομαδικές αφίξεις και μεμονωμένες εξυπηρετήσεις ($M^c/M/2$ ουρά) με ρυθμό αφίξεων ομάδων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης ανά υπηρέτη μ (εκθετικοί χρόνοι εξυπηρέτησης με παράμετρο μ). Κάθε αφικνούμενη ομάδα έχει μέγεθος 1 με πιθανότητα $\frac{2}{3}$ και μέγεθος 2 με πιθανότητα $\frac{1}{3}$. Έστω $\{Q(t)\}$ η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των πελατών .

(α) Να αιτιολογηθεί γιατί η $\{Q(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και να γίνει το διάγραμμα των ρυθμών μετάβασής της. ($\frac{1}{2}$ βαθμός)

(β) Να διατυπώσετε τη συνθήκη ευστάθειας για το σύστημα, δικαιολογώντας τη διαισθητικά. ($\frac{1}{2}$ βαθμός)

(γ) Να υπολογίσετε την πιθανογεννήτρια $P(z)$ της στάσιμης κατανομής (p_n) της $\{Q(t)\}$. (2 βαθμοί)

(δ) Για $\lambda=3$ και $\mu=5$ να βρείτε έναν γενικό τύπο για τις στάσιμες πιθανότητες p_n, $n=0,1,2,\ldots$. (1 βαθμός)

Θέμα 3ο (3 βαθμοί): Θεωρούμε ένα δίκτυο Jackson με N σταθμούς εξυπηρέτησης. Η διαδικασία εξωτερικών αφίξεων στο σταθμό i είναι Poisson με ρυθμό $\lambda>0$ για $i=1,2,\ldots,N$. Κάθε αναχώρηση από έναν σταθμό i κατευθύνεται με πιθανότητα 1 στον επόμενο σταθμό $i+1$ για $i=1,2,\ldots,N-1$, ενώ οι αναχωρήσεις από το σταθμό N εγκαταλείπουν το δίκτυο. Κάθε σταθμός έχει έναν υπηρέτη και οι χρόνοι εξυπηρέτησης στο σταθμό i είναι εκθετικοί με παράμετρο $\lambda i+\alpha$, όπου $\alpha \ge 0$.

(α) Να βρείτε τη συνθήκη ευστάθειας του δικτύου σε όσο το δυνατόν απλούστερη μορφή. ($\frac{1}{2}$ βαθμός)

(β) Να βρείτε το μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο δίκτυο. (1 βαθμός)

(γ) Να βρείτε το μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο δίκτυο δεδομένου ότι εισήλθε σε αυτό δια του σταθμού N. (1 βαθμός)

(δ) Να βρείτε το μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη του δικτύου στο σταθμό N. ($\frac{1}{2}$ βαθμός)

Διάρκεια εξέτασης : 2 ώρες και 30 λεπτά. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

Να γραφούν και τα 3 θέματα