ΟΥΡΕΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ – ΙΟΥΝΙΟΣ 2004

Θέμα 1ο: (3.5 βαθμοί) Θεωρούμε την τροποποίηση της M/M/K/K ουράς με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ και εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ, όπου ορισμένοι πελάτες αποχωρούν από το σύστημα αμέσως μόλις αφιχθούν χωρίς να εξυπηρετηθούν (αποθαρρυνόμενοι πελάτες). Συγκεκριμένα, κάθε πελάτης που βρίσκει n άλλα άτομα στο σύστημα κατά την άφιξή του αναχωρεί με πιθανότητα $\frac{n}{K}$, $n = 0,1,\ldots,K$.

(α) Να γίνει το διάγραμμα των ρυθμών μετάβασης για τη Μαρκοβιανη αλυσίδα $\{Q(t)\}$ του αριθμού πελατών στο σύστημα και να βρεθεί η στάσιμη κατανομή της (p_n). Τι είδους κατανομή είναι;

(β) Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο ποσοστό των άμεσα αποχωρούντων πελατών.

(γ) Να βρεθούν οι οριακές κατανομές (r_n) και (d_n) των εμφυτευμένων διαδικασιών $\{Q_n^-\}$ και $\{Q_n^+\}$ του αριθμού των πελατών σε στιγμές πραγματικών αφίξεων και αναχωρήσεων αντίστοιχα.

(δ) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής $E[S]$ ενός πελάτη στο σύστημα, λαμβάνοντας υπόψιν όλους τους πελάτες. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής $E[S']$ ενός πελάτη στο σύστημα, λαμβάνοντας υπόψιν μόνο τους πελάτες που εξυπηρετούνται.

(ε) Να βρεθεί ο μέσος κύκλος απασχόλησης του συστήματος.

Θέμα 2ο: (1.5 βαθμοί) (α) Να μοντελοποιήσετε ως Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου την $E_2/M/2/2$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ, με τη μέθοδο των φάσεων (περιγράψτε τις καταστάσεις και σχεδιάστε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης).

(β) Να μοντελοποιήσετε ως Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου την $M/E_3/1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και μέσο χρόνο εξυπηρέτησης $\frac{1}{\mu}$, με τη μέθοδο των φάσεων (περιγράψτε τις καταστάσεις και σχεδιάστε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης).

Θέμα 3ο: (4 βαθμοί) Θεωρούμε την M/M/1 ουρά με ομαδικές αφίξεις και μεμονωμένες εξυπηρετήσεις (M^c/M/1). Ο ρυθμός αφίξεων είναι λ, ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μ και κάθε αφικνούμενη ομάδα αποτελείται πάντα από 2 πελάτες. Έστω $\{Q(t)\}$ η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των πελατών.

(α) Να αιτιολογήσετε γιατί η $\{Q(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και να κάνετε το διάγραμμα των ρυθμών μετάβασής της.

(β) Να υπολογίσετε την πιθανογεννήτρια $P(z)$ της στάσιμης κατανομής (p_n) της $\{Q(t)\}$ συναρτήσει των λ, μ και p_0.

(γ) Να βρεθεί η συνθήκη ευστάθειας του συστήματος και να υπολογιστεί η p_0.

(δ) Να βρεθεί συναρτήσει των πιθανοτήτων (p_n), η πιθανότητα ένας πελάτης αμέσως μετά την αφιξή του στο σύστημα να καταλάβει την n-οστή θέση (να έχει εμπρός του $n-1$ πελάτες).

(ε) Για $\lambda = 1$ και $\mu = 6$ να βρείτε έναν γενικό τύπο για την p_n.

Θέμα 4ο: (2 βαθμοί) Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με 1 υπηρέτη, στο οποίο καταφθάνουν πελάτες δυο τύπων 1 και 2, σύμφωνα με δυο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Κάθε πελάτης ανεξαρτήτως τύπου έχει εκθετικό χρόνο εξυπηρέτησης παραμέτρου μ. Οι πελάτες τύπου 1 έχουν απόλυτη προτεραιότητα έναντι των πελατών τύπου 2, δηλ. όταν υπάρχουν πελάτες τύπου 1 στο σύστημα ο υπηρέτης εξυπηρετεί αυτούς και αρχίζει να εξυπηρετεί πελάτες τύπου 2 μόνο όταν δεν υπάρχουν πελάτες τύπου 1. Επιπλέον, αν πελάτης τύπου 2 εξυπηρετείται και αφιχθεί πελάτης τύπου 1, ο υπηρέτης διακόπτει την εξυπηρέτηση και πηγαίνει να εξυπηρετήσει τον πελάτη τύπου 1.

(α) Να βρείτε τους μέσους αριθμούς πελατών τύπων 1 και 2, $E[Q_1]$ και $E[Q_2]$ αντίστοιχα.

(β) Ποια είναι η πιθανότητα να μη διακοπεί η εξυπηρέτηση ενός πελάτη τύπου 2;

Διάρκεια εξέτασης : 2 ώρες και 30 λεπτά. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**