ΟΥΡΕΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ – ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2007

Θέμα 1^ο^: Θεωρούμε την τροποποίηση της Μ/Μ/1 ουράς με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ και εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ, με αποθαρρυνόμενους πελάτες και μεταβλητό ρυθμό εξυπηρέτησης. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι ένας πελάτης που βρίσκει n άτομα στο σύστημα αναχωρεί άμεσα από το σύστημα (χωρίς να εξυπηρετηθεί) με πιθανότητα $\frac{n}{n+1}$, $n = 0,1,2,\ldots$. Επιπλέον η ταχύτητα του υπηρέτη όταν υπάρχουν n άτομα στο σύστημα είναι $\frac{1}{n+1}$ (δηλαδή ο ρυθμός αναχώρησης είναι $\frac{\mu}{n+1}$), $n = 1,2,\ldots$.

(α) Πότε το σύστημα είναι ευσταθές (στάσιμο); Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών στο σύστημα $\{Q(t)\}$, όταν είναι ευσταθές.

(β) Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο ποσοστό των πελατών που εξυπηρετούνται και οι οριακές κατανομές $(r_n^{ολικό})$ και $(r_n^{πραγμ})$ των εμφυτευμένων διαδικασιών του αριθμού των πελατών σε στιγμές αφίξεων, όλων των πελατών και των πελατών που τελικά εισέρχονται προς εξυπηρέτηση στο σύστημα αντίστοιχα.

(γ) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής $E[S]$ ενός πελάτη στο σύστημα, λαμβάνοντας υπόψιν μόνο τους πελάτες που εισέρχονται στο σύστημα. Να βρεθεί ο μέσος κύκλος απασχόλησης του συστήματος.

Θέμα 2^ο^: Θεωρούμε την τροποποίηση της Μ/Μ/1 ουράς με μεμονωμένες αφίξεις και ομαδικές εξυπηρετήσεις ($M/M^c/1$ ουρά) με ρυθμό αφίξεων λ που λειτουργεί ως εξής: Όταν στο σύστημα υπάρχουν τουλάχιστον δυο πελάτες, ο υπηρέτης εξυπηρετεί μια ομάδα ακριβώς δυο πελατών με ρυθμό μ ενώ όταν υπάρχει ένας μόνο πελάτης τότε τον εξυπηρετεί επίσης με ρυθμό μ. Έστω $\{Q(t)\}$ η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των πελατών .

(α) Να διατυπώσετε τη συνθήκη ευστάθειας για το σύστημα, δικαιολογώντας τη διαισθητικά.

(β) Να υπολογίσετε την πιθανογεννήτρια $P(z)$ της στάσιμης κατανομής (p_n) της $\{Q(t)\}$.

(γ) Να βρείτε έναν γενικό τύπο για τις στάσιμες πιθανότητες p_n, $n = 0,1,2,\ldots$.

Θέμα 3^ο^: Θεωρούμε ένα δίκτυο Jackson με N σταθμούς εξυπηρέτησης συνδεδεμένους σε σειρά (δηλαδή μόνο ο σταθμός 1 έχει εξωτερικές αφίξεις, οι αναχωρήσεις από κάθε σταθμό i κατευθύνονται με πιθανότητα 1 στον επόμενο σταθμό $i+1$ για $i = 1,2,\ldots,N-1$ και οι αναχωρήσεις από το σταθμό N εγκαταλείπουν το δίκτυο). Η διαδικασία αφίξεων του δικτύου είναι Poisson με ρυθμό λ και κάθε σταθμός έχει άπειρους υπηρέτες που έχουν εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ_i για το σταθμό i.

(α) Να υπολογίσετε το στάσιμο μέσο αριθμό πελατών στο δίκτυο.

(β) Να υπολογίσετε τη δεσμευμένη πιθανότητα να υπάρχουν k πελάτες στο σταθμό 1 δεδομένου ότι υπάρχουν συνολικά n πελάτες στο δίκτυο.

(γ) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος από τη στιγμή που ένας αφικνούμενος πελάτης βρίσκει το δίκτυο κενό έως την επόμενη στιγμή που το δίκτυο θα είναι ξανά κενό.

Διάρκεια εξέτασης : 2 ώρες και 30 λεπτά. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

Να γραφούν και τα 3 θέματα