ΟΥΡΕΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2010

Θέμα 1. (4.0 βαθμ.) Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/1$ ουράς με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ, εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ, 1 υπηρέτη και απεριόριστη χωρητικότητα με αποθαρρυνόμενους πελάτες και μεταβλητό ρυθμό εξυπηρέτησης. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι ένας πελάτης που βρίσκει n άτομα στο σύστημα κατά την άφιξή του αναχωρεί άμεσα, χωρίς να εξυπηρετηθεί, με πιθανότητα $\frac{2^n-1}{2^n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Επιπλέον η ταχύτητα του υπηρέτη όταν υπάρχουν n άτομα στο σύστημα είναι $\frac{1}{2^{n-1}}$ (δηλαδή ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι $\mu_n = \frac{\mu}{2^{n-1}}$), $n = 1, 2, 3, \ldots$. Θέτουμε $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

(α) (1.0 βαθμ.) Πότε το σύστημα είναι ευσταθές (στάσιμο); Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών στο σύστημα $\{Q(t)\}$, όταν είναι ευσταθές.

(β) (1.0 βαθμ.) Να βρεθούν οι οριακές κατανομές $(r_n^{\text{πραγμ}})$ και $(d_n^{\text{πραγμ}})$ των εμφυτευμένων διαδικασιών του αριθμού των πελατών σε στιγμές πραγματικών αφίξεων και αναχωρήσεων αντίστοιχα (δηλαδή λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους πελάτες που εισέρχονται στο σύστημα και εξυπηρετούνται).

(γ) (0.5 βαθμ.) Να υπολογιστεί το μακροπρόθεσμο ποσοστό των πελατών που αποχωρούν χωρίς να εξυπηρετηθούν (μακροπρόθεσμο ποσοστό χαμένων πελατών).

(δ) (1.0 βαθμ.) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα (δηλαδή ο μέσος χρόνος από τη στιγμή εισόδου στο σύστημα μέχρι την έναρξη εξυπηρέτησης) για έναν πελάτη που δεν αναχωρεί άμεσα κατά την άφιξή του, αλλά εισέρχεται στο σύστημα.

(ε) (0.5 βαθμ.) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος από τη στιγμή που φθάνει ένας πελάτης σε κενό σύστημα μέχρι την επόμενη φορά που το σύστημα θα είναι ξανά κενό.

Θέμα 2. (4.0 βαθμ.) Θεωρούμε τη $M/M/2$ ουρά με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ, εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ, 2 υπηρέτες και απεριόριστη χωρητικότητα.

(α) (1.0 βαθμ.) Να βρεθεί η πιθανότητα ένας αφικνούμενος πελάτης να αρχίσει άμεσα την εξυπηρέτησή του.

(β) (1.0 βαθμ.) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα ενός πελάτη που κατά την άφιξή του βρίσκει n άτομα.

(γ) (1.0 βαθμ.) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα ενός πελάτη.

(δ) (1.0 βαθμ.) Έστω ότι σε κάποια χρονική στιγμή στο συγκεκριμένο σύστημα εξυπηρέτησης βρίσκονται παρόντες 3 πελάτες, οι Π1, Π2 και Π3 εκ των οποίων οι Π1 και Π2 βρίσκονται σε διαδικασία εξυπηρέτησης στους δυο υπηρέτες, ενώ ο Π3 βρίσκεται στην ουρά. Να υπολογιστεί η πιθανότητα ο Π3 να αναχωρήσει από το σύστημα πριν από τον Π1.

Θέμα 3. (3.0 βαθμ.) Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με ομαδικές αφίξεις και ολικές εξυπηρετήσεις. Συγκεκριμένα, ομάδες πελατών φθάνουν στο σύστημα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Κάθε αφικνούμενη ομάδα αποτελείται από j πελάτες με πιθανότητα $\frac{1}{2^j}$, $j = 1, 2, \ldots$. Οι διαδοχικοί χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί με παράμετρο μ. Κάθε φορά που τελειώνει ένας χρόνος εξυπηρέτησης όλοι οι παρόντες πελάτες αναχωρούν από το σύστημα και το σύστημα αδειάζει (π.χ. το σύστημα μπορεί να μοντελοποιεί μια στάση μεταφορικού μέσου, όπου οι πελάτες-επιβάτες φθάνουν κατά ομάδες σύμφωνα με τη διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και το μεταφορικό μέσο περνά κάθε κάθε φορά μετά από εκθετικό χρόνο με παράμετρο μ και απομακρύνει από τη στάση όλους τους πελάτες-επιβάτες).

(α) (0.5 βαθμ.) Αιτιολογήστε σύντομα γιατί η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ που καταγράφει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου, σχεδιάστε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασής της και γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας για τη στάσιμη κατανομή (p_n).

(β) (1.5 βαθμ.) Προσδιορίστε την πιθανογεννήτρια $P(z)$ της στάσιμης κατανομής (p_n) της $\{Q(t)\}$.

(γ) (1.0 βαθμ.) Βρείτε ένα γενικό τύπο για τις στάσιμες πιθανότητες p_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!