ΟΥΡΕΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ – ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2006

Θέμα 1ο: Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/1$ ουράς με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ, όπου ο υπηρέτης απενεργοποιείται (δηλαδή παύει να εξυπηρετεί) κάθε φορά που το σύστημα αδειάζει και ενεργοποιείται (δηλαδή ξαναρχίζει να εξυπηρετεί) πάλι μόλις συγκεντρωθούν K πελάτες ($K \geq 1$ ακέραιος). Οι αφίξεις συνεχίζονται κανονικά, με ρυθμό λ, είτε ο υπηρέτης είναι ενεργός είτε όχι.

(α) Έστω $N(t)$ ο αριθμός των πελατών στο σύστημα και $I(t)$ η κατάσταση του υπηρέτη (0: ανενεργός, 1: ενεργός) τη χρονική στιγμή t. Να αιτιολογήσετε, κάνοντας διάγραμμα των άμεσα δυνατών μεταβάσεων και των αντίστοιχων χρόνων, ότι η $\{(N(t), I(t))\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχ. χρόνου με χώρο καταστάσεων $S = \{(n,0): n = 0,1,\ldots,K-1\} \cup \{(n,1): n = 1,2,\ldots\}$ και να κάνετε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.

(β) Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη στασιμότητα (ευστάθεια) του συστήματος. Στην περίπτωση που αυτή ικανοποιείται να βρεθεί η στάσιμη κατανομή $(p(n,i):(n,i) \in S)$.

(γ) Να βρεθεί ο μακροπρόθεσμος μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα, καθώς και το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που ο υπηρέτης είναι ανενεργός.

(δ) Να βρεθεί ο μέσος κύκλος απασχόλησης του συστήματος, δηλαδή ο μέσος χρόνος από τη στιγμή που ένας αφικνούμενος πελάτης βρίσκει το σύστημα κενό έως την επόμενη στιγμή που κάποιος πελάτης βρίσκει ξανά το σύστημα κενό.

Θέμα 2ο: Θεωρούμε τη $M/M/\infty$ ουρά με ομαδικές αφίξεις και μεμονωμένες εξυπηρετήσεις ($M^c/M/\infty$) με ρυθμό αφίξεων ομάδων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ, όπου κάθε αφικνούμενη ομάδα αποτελείται από K πελάτες ($K \geq 2$ ακέραιος). Έστω $\{Q(t)\}$ η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των πελατών .

(α) Να αιτιολογήσετε ότι η $\{Q(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και να κάνετε το διάγραμμα των ρυθμών μετάβασής της.

(β) Να υπολογίσετε την πιθανογεννήτρια $P(z)$ της στάσιμης κατανομής (p_n) της $\{Q(t)\}$ και τη στάσιμη (οριακή) πιθανότητα το πολύ ένας υπηρέτης να είναι απασχολημένος .

Θέμα 3ο: Θεωρούμε ένα δίκτυο Jackson με 3 ουρές: 1,2 και 3. Οι ουρές 1 και 2 έχουν εξωτερικές αφίξεις σύμφωνα με ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, ενώ η ουρά 3 δεν έχει εξωτερικές αφίξεις. Οι πελάτες που αναχωρούν από την ουρά 1 κατευθύνονται στην ουρά 3 με πιθανότητα 1, ενώ οι πελάτες που αναχωρούν από την ουρά 2 κατευθύνονται στην ουρά 3 με πιθανότητα p ή επιστρέφουν στην ουρά 2 για να επαναλάβουν την εξυπηρέτησή τους με πιθανότητα $1-p$. Οι πελάτες που αναχωρούν από την ουρά 3, εγκαταλείπουν το σύστημα. Οι ουρές 1 και 2 έχουν έναν υπηρέτη η καθεμιά ενώ η ουρά 3 έχει άπειρους υπηρέτες. Επιπλέον, όλες οι ουρές έχουν απεριόριστο χώρο αναμονής. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί με παραμέτρους μ_1, μ_2 και μ_3 για τις ουρές 1,2 και 3 αντίστοιχα.

(α) Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη στασιμότητα (ευστάθεια) του δικτύου. Στην περίπτωση αυτή να υπολογιστεί ο μακροπρόθεσμος μέσος αριθμός πελατών σε κάθε σταθμό του δικτύου.

(β) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο δίκτυο.

(γ) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο δίκτυο, δεδομένου ότι εισήλθε σε αυτό διαμέσου της ουράς 1.

(δ) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο δίκτυο, δεδομενου ότι εισήλθε σε αυτό διαμέσου της ουράς 2.

Να γραφούν και τα 3 θέματα. **Διάρκεια : 2 ώρες και 30 λεπτά.** **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**