Ουρές Αναμονής - 4^{η} δέσμη ασκήσεων

1. Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M^c/1$ ουράς (μοντέλου της παραγράφου 4.2 του βιβλίου) με τις ίδιες παραμέτρους, όπου ο υπηρέτης δεν περιμένει για τη συμπλήρωση r πελατών αλλά εξυπηρετεί όταν υπάρχει τουλάχιστον ένας πελάτης στο σύστημα. Αν ένας χρόνος εξυπηρέτησης τελείωσει και υπάρχουν λιγότεροι από r πελάτες στο σύστημα τότε αναχωρούν όλοι, ενώ αν υπάρχουν περισσότεροι από r τότε αναχωρούν ακριβώς r.

   a. Να γραφούν οι εξισώσεις για τη στάσιμη κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών στο σύστημα (σε μια τυχαία χρονική στιγμή).

   b. Χρησιμοποιώντας ένα βασικό αποτέλεσμα αιτιολογήστε ότι η συνθήκη ευστάθειας είναι $\lambda < r\mu$.

   c. Αποδείξτε ότι στην ευσταθή περίπτωση ($\lambda < r\mu$) η εξίσωση $\mu x^{r+1} - (\lambda + \mu)x + \lambda = 0$ έχει μια ρίζα $r_0 \in (0, 1)$.
   (Υπόδειξη: Δείξτε ότι η $f(x) = \mu x^{r+1} - (\lambda+\mu)x + \lambda$ είναι κυρτή με $f(0) > 0,\ f(1) = 0,\ f^{'}(1) > 0$ και συμπεράνετε το αποτέλεσμα)

   d. Στην ευσταθή περίπτωση, η στάσιμη κατανομή (p_n) είναι γεωμετρική με παράμετρο r_0 (δηλαδή $p_n = (1 - r_0)r_0^n,\ n = 0, 1, 2, ...$)

2. Θεωρούμε τη $M/M/1$ ουρά με ομαδικές αφίξεις και μεμονωμένες εξυπηρετήσεις ($M^c/M/1$). Ο ρυθμός αφίξεων είναι λ, ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μ και κάθε αφικνούμενη ομάδα αποτελείται πάντα από 2 πελάτες. Έστω $\{Q(t)\}$ η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των πελατών.

   a. Να αιτιολογήσετε γιατί η $\{Q(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και να κάνετε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασής της.

   b. Να υπολογίσετε την πιθανογεννήτρια $P(z)$ της στάσιμης κατανομής (p_n) της $\{Q(t)\}$ συναρτήσει των λ, μ και p_0.

   c. Να βρεθεί η συνθήκη ευστάθειας του συστήματος και να υπολογιστεί η p_0.

   d. Να βρεθεί συναρτήσει των πιθανοτήτων (p_n) η πιθανότητα ένας πελάτης αμέσως μετά την άφιξή του να καταλάβει την $n-$οστή θέση (να έχει μπροστά του $n - 1$ πελάτες).

   e. Για $\lambda = 1$ και $\mu = 6$ να βρείτε έναν γενικό τύπο για την (p_n).

3. Θεωρούμε την $M/M/1$ ουρά με ομαδικές αφίξεις και μεμονωμένες εξυπηρετήσεις ($M^c/M/1$ ουρά). Οι ομάδες φθάνουν στο σύστημα με ρυθμό λ και το μέγεθός τους έχει συνάρτηση πιθανότητας $(g_j : j = 1, 2, ...)$. Μια ομάδα που βρίσκει κατά την άφιξή της το σύστημα κενό εισέρχεται σίγουρα σε αυτό, ενώ αν βρει έστω και έναν πελάτη αναχωρεί ολόκληρη, χωρίς να εξυπηρετηθεί, με πιθανότητα $1 - p$. Ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μ. Έστω $\{Q(t)\}$ η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των πελατών στο σύστημα.

   a. Να αιτιολογήσετε γιατί η $\{Q(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και να κάνετε το διάγραμμα των ρυθμών μετάβασής της. Γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας για τη στάσιμη κατανομή (p_n).

b. Να υπολογίσετε την πιθανογεννήτρια $P(z)$ της στάσιμης κατανομής και τη συνθήκη ευστάθειας του συστήματος.

c. Να βρεθεί συναρτήσει των πιθανοτήτων p_n και g_n, η πιθανότητα ένας πελάτης αμέσως μετά την άφιξή του στο σύστημα να καταλάβει την $n-$οστή θέση (να έχει μπροστά του $n-1$ πελάτες).

d. Στην περίπτωση που $g_1 = 1$ και $g_j = 0$ για $j = 2, 3, ...$ να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (p_n).