Ουρές Αναμονής - 7^{η} δέσμη ασκήσεων

1. Θεωρούμε μια απλή Μαρκοβιανή ουρά με ρυθμούς αφίξεων και αναχωρήσεων

$$\lambda_n = (n+2)\lambda,\ n = 0,1,2,\dots \text{ και } \mu_n = n\mu,\ n = 1,2,\dots$$

αντίστοιχα, όπου λ, $\mu > 0$ γνωστές παράμετροι.

   α) Πότε η ουρά είναι στάσιμη; Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών στο σύστημα.

   β) Να βρεθεί ο μέσος ρυθμός αφίξεων στο σύστημα, καθώς και οι οριακές κατανομές (r_n) και (d_n) των εμφυτευμένων διαδικασιών $\{Q_n^-\}$ και $\{Q_n^+\}$ του αριθμού των πελατών σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων αντίστοιχα.

   γ) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής $E[S]$ ενός πελάτη στο σύστημα και ο μέσος χρόνος συνεχούς λειτουργίας του συστήματος $E[Y]$.

2. α) Θεωρούμε μια απλή Μαρκοβιανή ουρά με Poisson διαδικασία αφίξεων. Η πιθανότητα να αφήσει πίσω του ένας πελάτης κατά την αναχώρηση του το σύστημα κενό είναι $\frac{1}{2}$. Ο μέσος χρόνος παραμονής πελάτη στο σύστημα είναι 30 λεπτά και ο μέσος χρόνος συνεχούς λειτουργίας του είναι 2 ώρες. Να βρεθεί το μέσο μήκος του αριθμού των πελατών στο σύστημα. Αναφέρατε σαφώς όλες τις ιδιότητες και τους τύπους που χρησιμοποιείτε.

   β) Σε μια $M/M/1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και αναχωρήσεων μ να βρεθεί η κατανομή του αριθμού των πελατών που καταφθάνουν στο σύστημα κατά τη διάρκεια της εξυπηρέτησης ενός πελάτη.

   γ) Να μοντελοποιήσετε ως Μ.α.σ.χ. την $E_3/M/1$ ουρά με αποθαρρυνόμενους πελάτες. Θεωρήστε ότι ο ρυθμός αφίξεων είναι λ, ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης είναι $\frac{1}{\mu}$ και υποθέστε ότι ένας πελάτης που κατά τη στιγμή της αφιξης του βρίσκει n άλλους πελάτες αναχωρεί αμέσως από το σύστημα με πιθανότητα $\frac{n}{n+1}$. Χρησιμοποιείστε τη μέθοδο των φάσεων (περιγράψτε τις καταστάσεις και σχεδιάστε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης).

3. Θεωρούμε τη $M^c/M/2$ ουρά, δηλαδή την $M/M/2$ ουρά με ομαδικές αφίξεις, όπου ο ρυθμός αφίξεων ομάδων είναι λ και ο ρυθμός εξυπηρέτησης μ. Κάθε αφικνούμενη ομάδα έχει μέγεθος j, $j = 1,2$ με πιθανότητα $p_j = \frac{1}{2}$. Έστω $\{Q(t),\ t \geq 0\}$ η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των πελατών στο σύστημα.

   α. Να αιτιολογήσετε γιατί η $\{Q(t),\ t \geq 0\}$ είναι Μ.α.σ.χ. κάνοντας πίνακα των άμεσα δυνατών μεταβάσεων και των αντίστοιχων χρόνων.

   β. Γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας για τη στάσιμη κατανομή (p_n). Να υπολογίσετε την πιθανογεννήτρια $P(z)$ της στάσιμης κατανομής (p_n) της $\{Q(t)\}$ συναρτήσει των λ, μ και p_0.

   γ. Να βρεθεί η συνάρτηση ευστάθειας του συστήματος και να υπολογιστεί η p_0.

4. Θεωρούμε μια $M/M/\infty$ ουρά με ομαδικές αφίξεις με ρυθμό ομάδων λ, γεωμετρική συνάρτηση πιθανότητας μεγέθους αφικνούμενων ομάδων $g_j = (1-a)a^{j-1}$, $j = 1,2,\dots$ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ. Να βρεθεί η πιθανογεννήτρια $P(z)$ της στάσιμης κατανομής του αριθμού των πελατών της, το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα και η πιθανότητα κενού συστήματος.

5. Θεωρούμε ένα δίκτυο Jackson δυο ουρών O_1, O_2. Η ουρά O_1 έχει Poisson(λ) εξωτερική διαδικασία αφίξεων, ενώ η ουρά O_2 δεν έχει εξωτερικές αφίξεις. Οι αναχωρήσεις από την ουρά O_1 κατευθύνονται προς την ουρά O_2 με πιθανότητα 1, ενώ οι αναχωρήσεις από την ουρά O_2 κατευθύνονται στην ουρά O_1 με πιθανότητα p και φεύγουν από το δίκτυο με πιθανότητα $q = 1-p$. Η ουρά O_1 έχει άπειρους υπηρέτες, ενώ η ουρά O_2 έχει έναν υπηρέτη και άπειρο χώρο αναμονής. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί με παραμέτρους μ_1 και μ_2, για τις ουρές O_1 και O_2 αντίστοιχα.

   α. Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για την στασιμότητα(ευστάθεια) του παραπάνω Μαρκοβιανού δικτύου.

   β. Βρείτε την αντίστοιχη στάσιμη κατανομή.

   γ. Να υπολογιστούν η κατανομή του αριθμού των επισκέψεων ενός πελάτη στον σταθμό O_2, καθώς και το μέσο πλήθος επισκέψεων σε αυτόν.

6. Να υπολογιστεί η οριακή κατανομή $F_S(x)$ του χρόνου παραμονής S σε μια $M/M/1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων α^2 και ρυθμό εξυπηρετήσεων α, $\alpha \in (0,1)$.

7. Έστω $Q(t)$ ο αριθμός των πελατών και $M(t)$ ο συνολικός αριθμός υπολειπόμενων φάσεων εξυπηρέτησης για όλους τους πελάτες που βρίσκονται στο σύστημα τη χρονική στιγμή t σε μια $M/E_2/1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και $\Gamma\alpha\mu\mu\alpha(2,2\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης.

   α. Να αιτιολογήσετε γιατί η $\{M(t)\}$ είναι Μ.α.σ.χ. και να κάνετε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης. Γιατί η $\{Q(t)\}$ δεν είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα;

   β. Να υπολογίσετε την πιθανογεννήτρια $P(z)$ της στάσιμης κατανομής (p_n) της $\{M(t)\}$.

   γ. Για $\lambda = 1$ και $\mu = 3$ να βρείτε έναν γενικό τύπο για την στάσιμη πιθανότητα (p_n) της $\{M(t)\}$ καθώς και για την οριακή πιθανότητα $\lim_{t\to\infty} P[Q(t) = n]$.