19.10.09 3° μάθημα

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου

① ΜαΣΧ

$\{X(t)\}$ ΜαΣΧ με ρυθμούς $q_{ij} = \lim_{h\to 0} \frac{Pr[X(t+h)=j \mid X(t)=i)}{h}$

$(Pr[X(t+h)=j \mid X(t)=i] = q_{ij}h + o(h),\ h\to 0^+)$ $\frac{o(h)}{h}\to 0$

$(P_j\ j\in S)$ είναι η οριακή ή στάσιμη κατανομή ισορροπίας της $\{X(t)\}$
$\uparrow$
XK

$P_j = \lim_{t\to\infty} Pr[X(t)=j]$ = ποσοστό του χρόνου στην κατάσταση j μακροπρόθεσμα

Μια ΜαΣΧ λέγεται αδιαχώριστη ή ανάγωγη ή απλή (irreducible) αν για κάθε $i,j\in S$ υπάρχει $i=i_0\to i_1\to\dots\to i_n=j$ με $q_{i_0 i_1}, q_{i_1 i_2}, \dots, q_{i_{n-1} i_n} > 0$

② Εύρεση Στάσιμης Κατανομής

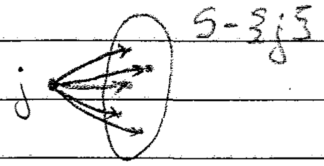
Θεώρημα (Εργοδικό Θεώρημα ΜαΣΧ)
Έστω $\{X(t)\}$ ΜαΣΧ τότε $\exists$ $P_j = \lim_{t\to\infty} Pr[X(t)=j]$, $j\in S$

Το P_j είναι λύση των Εξισώσεων Ισορροπίας

$$P_j \sum_{i\neq j} q_{ji} = \sum_{i\neq j} P_i q_{ij},\ j\in S$$

και της εξίσωσης κανονικοποίησης $\sum_{j\in S} P_j = 1$

Αν το σύστημα δεν έχει λύση τότε $P_j = 0 \ \forall j \in S$, ενώ αν το σύστημα έχει λύση τότε $P_j > 0, \ \forall j \in S$



P_j : μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου στη j

q_{ji} : # μεταβάσεων προς την i ανά μονάδα χρόνου στη j

$P_j q_{ji}$: # μεταβάσεων τύπου $j \to i$ ανά μονάδα χρόνου

π.χ. $S = \{1,2,3\}$

$p_1 = 0,5$ $\quad q_{12} = 10$

$p_2 = 0,3$ $\quad q_{13} = 10$

$p_3 = 0,2$ $\quad$ 1000 χρ. μον. στη 1.

(πλήρους)
Εξισώσεις Ισορροπίας

Ρυθμός εξόδου από την j	=	Ρυθμός εισόδου στη j

③ Εξισώσεις Γενικευμένης Ισορροπίας

Η στάσιμη κατανομή μιας Μαρκ $\{X(t)\}$ πληροί πάντα τις εξισώσεις Γενικευμένης Ισορροπίας

$A \longleftrightarrow S - A = A^c$

$$\sum_{i \in A} \sum_{j \in A^c} P_i q_{ij} = \sum_{j \in A^c} \sum_{i \in A} P_j q_{ji}, \ A \subsetneq S$$

④ Υπολογισμοί Αμοιβών

Έστω $\{X(t)\}$ Μαρκ με ρυθμούς q_{ij} και στάσιμη κατανομή $(p_j, j\in S)$. Έστω r_i = αμοιβή ανά χρονική μονάδα παραμονής στην i
r_{ij} = αμοιβή ανά μετάβαση $i \to j$

Τότε η μέση αμοιβή ανά χρονική μονάδα:

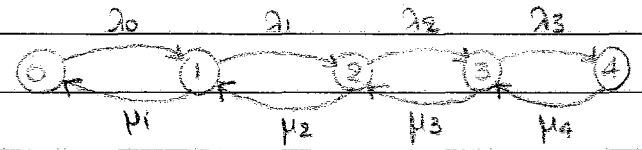
$$\sum_{i\in S} p_i r_i + \sum_{j\in S} \sum_{i\neq j} p_j q_{ji} r_{ji}$$

⑤ Απλές Μαρκοβιανές Ουρές

Μαρκοβιανή Ουρά $\leftrightarrow$ $\{Q(t)\}$ με $Q(t)$ = # πελατών είναι Μαρκ

Απλή $\leftrightarrow$ Μεμονωμένες Αφίξεις / Αναχωρήσεις

$\{Q(t)\}$



λ_n = ρυθμός αφίξεων στην κατάσταση n
μ_n = ρυθμός εξυπηρέτησης στην κατάσταση n

Έστω $p_n = \lim_{t\to\infty} \Pr[Q(t)=n]$

Εξισώσεις Πλήρους Ισορροπίας:

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$$
$$(\lambda_1+\mu_1) p_1 = \lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2$$
$$(\lambda_2+\mu_2) p_2 = \lambda_1 p_1 + \mu_3 p_3$$
$$\vdots$$

Εξισώσεις Γενικευμένης Ισορροπίας : $\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$

$\lambda_1 p_1 = \mu_2 p_2 \qquad A = \{0,1\}$

$\lambda_2 p_2 = \mu_3 p_3 \qquad A = \{0,1,2\}$

$\vdots$

$\lambda_{n-1} p_{n-1} = \mu_n p_n \qquad A = \{0,1,\dots,n-1\}$

$$\Rightarrow \quad p_n = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-2}\lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_{n-1}\mu_n} p_0 , \quad n \geq 1.$$

Για να βρω την p_0 εφαρμόζω την εξίσωση κανονικοποίησης

Δεν υπάρχει περίπτωση να υπολογισθεί η p_n χωρίς εφαρμογή της εξίσωσης κανονικοποίησης

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Rightarrow p_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\right) = 1.$$

Αν $B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} < \infty \Leftrightarrow$ Ευστάθεια $p_0 = B$

$= \infty \Leftrightarrow$ Αστάθεια $p_n = 0, \ n \geq 0$

$$p_n = \begin{cases} B , & n = 0 \\ \dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-2}\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-1}\mu_n} B , & n \geq 1 \end{cases}$$

⑥ Πεπερασμένος χ.κ.

S χ.κ. πεπερασμένος $\Rightarrow \{X(t)\}$ είναι ευσταθής ($p_j > 0 \ \forall j$)

⑦ Αθροίσματα που πρέπει να ξέρω :

① $(1+t)^{\nu} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k$

② $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$

③ $\frac{1}{(1-t)} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k, \ |t| < 1$

⑧ Υπενθύμιση Exp-Erlang

$X_1, X_2, \ldots, X_n \sim Exp(\lambda)$ ανεξ

$\Downarrow$

$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim Erlang(n, \lambda)$

σ.π.π. $f_{S_n}(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \ x > 0$

⑨ M/M/1/1 ουρά

Poisson (λ) διαδικασία αφίξεων
Exp(μ) χρ. εξυπηρέτησης
1 υπηρέτης
χωρητικότητα 1

Κατάσταση	Επομ. Κατάσταση	Χρόνος
0	1	Exp(λ) ✓
1	0	Exp(μ) ✓

{Q(t)} ΜΑΣΧ

$$0 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} 1$$

S χ.κ. πεπερασμένος ⇒ Εργοδική

$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ $\qquad$ $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ ρυθμός απασχόλ.

$p_0 + p_1 = 1 \Rightarrow p_0 \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ $\qquad$ $p_0 = \frac{1}{\rho+1}$ $\qquad$ $p_1 = \frac{\rho}{\rho+1}$

$r_n = p_n, \ n = 0, 1$ (PASTA)
$d_n = r_n$ (από ιδιότητα Μεμονωμένων Μεταβάσεων)

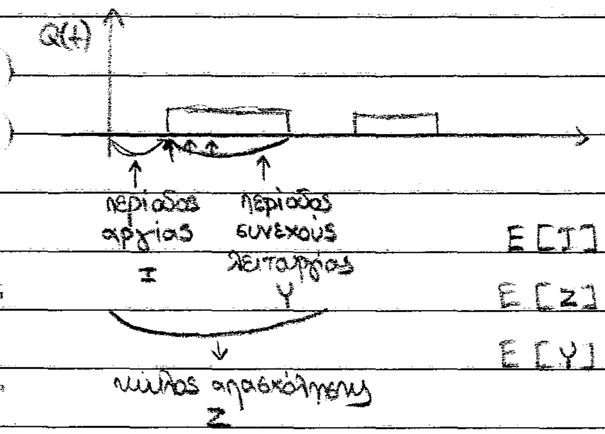
S = χρόνος παραμονής στο σύστημα ενός πελάτη

$$F_S(x) = P_r[S \le x] = \pi_0 \, P_r[S \le x \mid \text{βρήκε 0 πελάτες στην άφιξη}] + \pi_1 \, P_r[S \le x \mid \text{βρήκε 1 πελάτη στην άφιξη}] =$$

$$= \frac{1}{1+p}\left(1 - e^{-\mu x}\right) + \frac{p}{p+1} \cdot 1 = 1 - \frac{1}{p+1} e^{-\mu x}$$

Αν έχω αμφιβολία για το αποτέλεσμα τσεκάρω απ'το Little

αν $E[Q] = \lambda E[S]$



$I \sim Exp(\lambda) \rightarrow E[I] = \frac{1}{\lambda}$

p_0 = μακροπρόθεσμο ποσοστό 0 πελ. = ποσοστό 0 πελ σε ένα 1 κύκλο απασχόλησης =

$= \frac{E[I]}{E[Z]}$

$E[I] =$

$E[Z] =$

$E[Y] =$

$$\Rightarrow E[Z] = \frac{E[I]}{p_0} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{1+p}} = \frac{1+p}{\lambda}$$

$$E[Y] = E[Z] - E[I]$$

(10) M / M / 1 άρα

a) Poisson διαδικασία αφίξεων

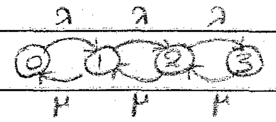
$Exp(\mu)$ χρ. εξυπηρέτησης

1 υπηρέτης

∞ χωρητικότητα

$Q(t)$ = # πελατών είναι Μαρκ ;

Κατάσταση	Επομ. Κατάσταση	Χρόνος	Αλυσ. Μαρκ.
0	1	$Exp(\lambda)$ ✓	
$n \geq 1$	$n+1$	$Exp(\lambda)$ ✓	
	$n-1$	$Exp(\mu)$ ✓	



$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\rho}, & \rho < 1 \text{ Ευστάθεια} \\ \infty, & \rho \geq 1 \text{ Αστάθεια} \end{cases}$$

$\rho < 1$ → $B = 1-\rho$

$$p_n = \begin{cases} 1-\rho, & n=0 \\ (1-\rho)\rho^n, & n \geq 1 \end{cases} = (1-\rho)\rho^n, \quad n \geq 0$$

$(p_n) \sim Geom(\rho)$ στο $\{0,1,2\dots\}$

$r_n = p_n$ (PASTA)
$d_n = r_n$ (ΙΣ. Μεταν. Μεταβάσεων)

$$E[Q] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho} \Rightarrow \frac{d}{d\rho}\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{d}{d\rho}\frac{1}{1-\rho}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} = \frac{1}{(1-\rho)^2} \overset{\rho(1-\rho)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = \frac{\rho(\cancel{1-\rho})}{(1-\rho)^{\cancel{2}}} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Θεώρημα Little $E[Q] = \lambda E[S] \Rightarrow E[S] = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$

S: χρόνος παραμονής
$x > 0$

$$F_S(x) = \Pr[S \le x] = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\text{πιθ. να δει } n \text{ πελάτες στην άφιξη}}_{v_n} \Pr[S \le x \mid \text{βλέπει } n \text{ πελ. στην άφιξη}] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)p^n \Pr[S \le x \mid \text{βλέπει } n \text{ πελ. στην άφιξη}] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)p^n \int_0^x \frac{\mu^{n+1}}{n!} t^n e^{-\mu t}\, dt = *$$

$S \mid \text{βλέπει } n \text{ πελ. στην άφιξη} =$

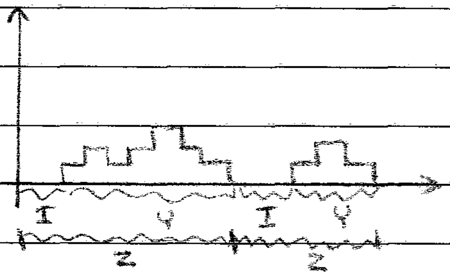
$$= \underset{\text{Exp}(\mu)}{X_1} + \underset{\text{Exp}(\mu)}{X_2} + \ldots + \underset{\text{Exp}(\mu)}{X_n} + \underset{\text{Exp}(\mu)}{X_{n+1}}$$

Erlang$(n+1, \mu)$

$$* = (1-p)\mu \int_0^x e^{-\mu t} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p\mu t)^n}{n!}}_{e^{p\mu t}} dt =$$

$$= (1-p)\mu \int_0^x e^{-\mu(1-p)t}\, dt =$$

$$= 1 - e^{-\mu(1-p)x} \quad \text{άρα } S \sim \text{Exp}(\mu(1-p))$$



$E[I] = \frac{1}{\lambda}$

$$p_0 = \frac{E[I]}{E[Z]} \Rightarrow 1-p = \frac{\frac{1}{\lambda}}{E[Z]} \Rightarrow E[Z] = \frac{1}{\lambda(1-p)}$$

$E[Y] = E[Z] - E[I]$