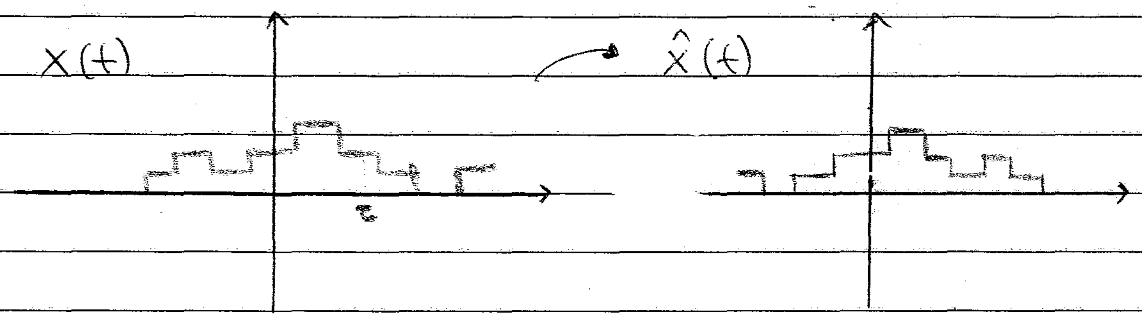
14.12.09 9° μάθημα

Αντιστροφή Μαρκ

① Ορισμός



Έστω $\{X(t)\}$ στοχ. διαδ. Η αντιστροφή της με κέντρο $\tau \in \mathbb{R}$ είναι η διαδ. $\{\hat{X}_\tau(t)\}$ με $\hat{X}_\tau(t) = X(\tau - t)$, $t \in \mathbb{R}$. Για $\tau = 0$ $\hat{X}(t) = \hat{X}_0(t) = X(-t)$ την λέμε απλή αντιστροφή

② Θεώρημα

Έστω $\{X(t)\}$ στάσιμη Μαρκ με ρυθμούς q_{ij} και στάσιμη κατανομή (p_i) τότε για την αντιστροφή $\{\hat{X}(t)\}$ έχουμε

1) $\hat{X}(t)$ είναι Μαρκ
2) Έχει στάσιμη κατανομή $(\hat{p}_i)$ με $\hat{p}_i = p_i$
3) Έχει ρυθμούς q_{ij} με $\hat{q}_{ij} = p_j q_{ji} / p_i$ *...*

Σε μια Μαρκ έχουμε δει $p_j q_{ji}$ = ρυθμός μεταβάσεων $j \to i$
= μέσο πλήθος μεταβάσεων $j \to i$
στη μονάδα του χρόνου

! Μαρκ είναι μια διαδικασία, στην οποία, δοθέντος του παρόντος, το μέλλον είναι ανεξάρτητο από το παρελθόν!!

* Πρέπει Ρυθμός Μεταβάσεων $j \to i$ στην $\{X(t)\}$ $=$ Ρυθμός Μεταβάσεων $i \to j$ στην $\{\hat{X}(t)\}$

Δηλαδή $p_j q_{ji} = \hat{p}_i \hat{q}_{ij}$ *

Απόδειξη (i) $\{X(t)\}$ Markov $\Rightarrow$ $\{X(t) : t < t_0\}$ κι $\{X(t) : t > t_0\}$ είναι ανεξ. δοθείσης της $X(t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\{\hat{X}(t) : t > t_0\}$ κι $\{\hat{X}(t) : t < t_0\}$ είναι ανεξ. δοθείσης της $\hat{X}(t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\{\hat{X}(t)\}$ είναι Markov

(ii) $$\hat{p}_i = \lim_{t\to\infty} \Pr[\hat{X}(t) = i] = \lim_{t\to\infty} \Pr[X(-t) = i] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{στασιμότητα} \\ \text{της } \{X(t)\}}}{=} p_i$$

(iii) $$\hat{q}_{ij} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[\hat{X}(t+h) = j \mid \hat{X}(t) = i]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[X(-t-h) = j \mid X(-t) = i]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[X(-t-h) = j, X(-t) = i]}{h \Pr[X(-t) = i]} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[X(-t-h) = j]\,\Pr[X(-t) = i \mid X(-t-h) = j]}{\Pr[X(-t) = i]\, h} =$$

$$= \frac{p_j q_{ji}}{p_i}$$

③ Αντιστρεψιμότητα

Έστω $\{X(t)\}$ στοχ. διαδικασία. Η $\{X(t)\}$ λέγεται αντιστρέψιμη αν είναι στοχ. ισοδύναμη με την αντίστροφή της.

$$Pr[X(t) \in A \mid X(t') \in B] = Pr[\hat{X}(t) \in A \mid \hat{X}(t') \in B]$$

(Στοχαστικά Ισοδύναμες Ανελίξεις ≡ Ισόνομες)

Ορισμός $\{X(t)\}, \{Y(t)\}$ στοχαστικά ισοδύναμες $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (X(t_1), \ldots, X(t_n))$ και $(Y(t_1), \ldots, Y(t_n))$ είναι
ισόνομες για κάθε n και $t_1 < \ldots < t_n$

④ Αντιστρέψιμες Markov

Θεώρημα: Μια Markov $\{X(t)\}$ με ρυθμούς q_{ij} και στάσιμη κατανομή (p_i) είναι αντιστρέψιμη $\Leftrightarrow p_i q_{ij} = p_j q_{ji}, \ \forall i,j$

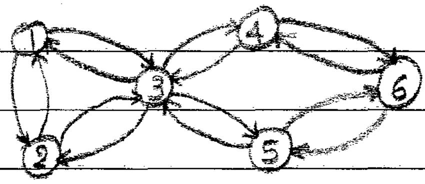
Απόδειξη: $\{X(t)\}$ αντιστρέψιμη $\Leftrightarrow \{X(t)\}, \{\hat{X}(t)\}$ στοχ. ισοδύναμες
$\Leftrightarrow q_{ij} = \hat{q}_{ij} \quad \forall i,j$

$\Leftrightarrow q_{ij} = \dfrac{p_j q_{ji}}{p_i} \quad \forall i,j$

⑤ Κριτήριο αντιστρεψιμότητας Kolmogorov

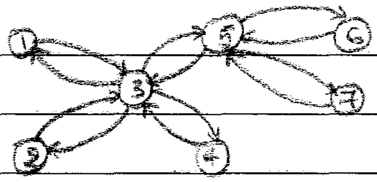
Θεώρημα: Μια Markov $\{X(t)\}$ με ρυθμούς q_{ij} είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν για κάθε κύκλο καταστάσεων $i_0 \to i_1 \to \ldots \to i_m \to i_0$
(στις εφαρμογές: απλό και με τουλάχιστο 3 καταστάσεις)
το γινόμενο των αντίστοιχων ρυθμών κατά τις δύο φορές του κύκλου είναι το ίδιο, δηλ.

$$q_{i_0 i_1} q_{i_1 i_2} \ldots q_{i_{m-1} i_m} q_{i_m i_0} = q_{i_0 i_m} q_{i_m i_{m-1}} \ldots q_{i_2 i_1} q_{i_1 i_0}$$

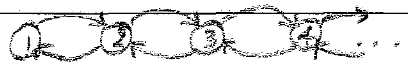


Είναι αντιστρ. $\Leftrightarrow$ $q_{13}\,q_{32}\,q_{21} = q_{12}\,q_{23}\,q_{31}$ και $q_{34}\,q_{46}\,q_{65}\,q_{53} = q_{35}\,q_{56}\,q_{64}\,q_{43}$

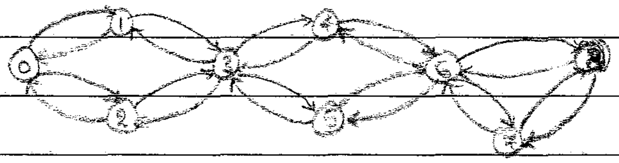
⑥ Πόρισμα: Κάθε Μαρκ. με διαγρ. ρυθμών μεταβ. αμφιδρ. δέντρο είναι αντιστρεπτή.



Ειδική περίπτωση: Αλυσίδες Γέννησης-Θανάτου



⑦ Χρήση της αντιστρεψιμότητας για τον υπολογισμό στασ. κατανομής



Έχω ότι με κρ. Kolmogorov έχω ότι είναι αντιστρέψιμη

$$p_0 q_{01} = p_1 q_{10} \Rightarrow p_1 = \frac{q_{01}}{q_{10}} p_0$$

$$p_0 q_{02} = p_2 q_{20} \Rightarrow p_2 = \frac{q_{02}}{q_{20}} p_0$$

$$p_1 q_{13} = p_3 q_{31} \Rightarrow p_3 = \frac{q_{13}}{q_{31}} p_1 = \frac{q_{01}\,q_{13}}{q_{10}\,q_{31}} p_0$$

$$p_6 = \frac{q_{01}\,q_{13}\,q_{34}\,q_{46}}{q_{10}\,q_{31}\,q_{43}\,q_{64}} p_0$$

Αν $\{X(t)\}$ είναι αντιστρέψιμη Markov για να βρω το p_i επιλέγω μονοπάτι $0 \to i_1 \to i_2 \to i_3 \to \dots \to i_n \to i$ και τότε

$$p_i = \frac{q_{0 i_1} q_{i_1 i_2} \cdots q_{i_n i}}{q_{i_1 0} q_{i_2 i_1} \cdots q_{i i_n}} p_0$$

⑧ Εξισώσεις Ισορροπίας

Πλήρεις i $A \setminus \{i\}$

$$p_j \sum_{i \neq j} q_{ji} = \sum_{i \neq j} p_i q_{ij}$$

Ισχύουν Πάντα

Γενικευμένες A A^c

$$\sum_{i \in A} \sum_{j \in A^c} p_i q_{ij} = \sum_{j \in A^c} \sum_{i \in A} p_j q_{ji}$$

Λεπτομερείς i j

$p_i q_{ij} = p_j q_{ji}$ ισχύουν μόνο για αντιστρέψιμες

⑨ Η M/M/K ουρά με ετερογενείς υπηρέτες

* Poisson (λ) διαδ. αφίξεων
* Exp(μ_k) χρ. εξυπηρέτησης για τον υπηρ. k.
* k υπηρέτες
* ∞ χωρητικότητα

Q(t) = # πελατών στο σύστημα

Κατάσταση	Επόμ. Κατάσταση	Χρόνος
0	1	Exp(λ)
1	2	Exp(λ)
	0	;
$1 \leq n \leq k-1$ υπάρχει πρόβλημα		

Q(t) όχι Markov

Θα ήταν Exp(μ_k) αν ήξερα αν είναι στον υπηρέτη k

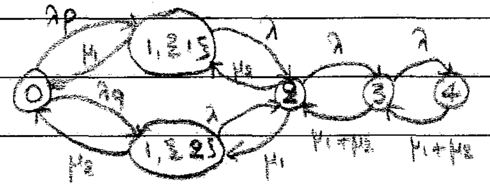
Όμως αν για $1 \le n \le r-1$ ορίσω ως κατάσταση του συστήματος (n, A) τότε έχουμε Μαρκ

σύνολο απασχολ. υπηρετών

π.χ. $r=2$ $S' = \{0, (1,\{1\}), (1,\{2\}), 2, 3, \ldots\}$

Κατάσταση	Επόμ. Κατάσταση	Χρόνος	
0	~~1~~ $(1,\{1\})$ $(1,\{2\})$	~~$Exp(\lambda)$~~ $Exp(\lambda p)$ $Exp(\lambda q)$	
$(1,\{1\})$	2	$Exp(\lambda)$	
	0	$Exp(\mu_1)$	Όλα
$(1,\{2\})$	2	$Exp(\lambda)$	Exp
	0	$Exp(\mu_2)$	άρα
$n \ge 2$	$n+1$	$Exp(\lambda)$	Μαρκ
	$n-1$	$Exp(\mu_1+\mu_2)$	

Θεωρούμε ότι μια άφιξη σε άδειο σύστημα διαλέγει
τυχαία υπηρ 1 με πιθ p
υπηρ. 2 με πιθ q



Μήπως είναι αντιστρέψιμη?

Αντιστρεψιμότητα $\underset{\text{Kolmogorov}}{\Leftrightarrow}$ $\lambda p \lambda \mu_1 \mu_2 = \lambda q \lambda \mu_2 \mu_1 \Leftrightarrow p = q$

Αντιστρεψιμότητα $\Leftrightarrow$ άφιξη σε κενό σύστημα διαλέγει ισοπίθανα υπηρέτη

Έστω $p = q = \frac{1}{2}$ τότε $P_{(1,\{1\})} = \frac{\lambda}{2\mu_1} P_0$

$P_{(1,\{2\})} = \frac{\lambda}{2\mu_2} P_0$

$$p_n = \frac{\lambda^n}{2\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)^{n-2}}\, p_0 \quad , \; n \geq 2$$

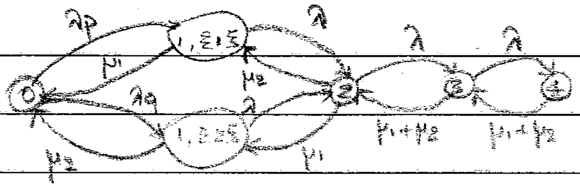
Το p_0 υπολογίζεται από την εξίσωση κανονικοποίησης

$$p_0 + p_{(1,\Sigma1\Sigma)} + p_{(1,\Sigma2\Sigma)} + \sum_{n=2}^{\infty} p_n = 1 \Rightarrow p_0\left(1 + \frac{\lambda}{2\mu_1} + \frac{\lambda}{2\mu_2} + \frac{\lambda^2}{2\mu_1\mu_2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^{n-2}\right) = 1$$

Αν $\lambda \geq \mu_1+\mu_2$ τότε αστάθεια

Αν $\lambda < \mu_1+\mu_2$ τότε $p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{2\mu_1} + \frac{\lambda}{2\mu_2} + \frac{\lambda^2}{2\mu_1\mu_2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}}\right)^{-1}$

Στην περίπτωση $p \neq q$



$$\left.\begin{aligned} \lambda p_0 &= \mu_1 p_{(1,\Sigma1\Sigma)} + \mu_2 p_{(1,\Sigma2\Sigma)} \\ (\lambda+\mu_1)\, p_{(1,\Sigma1\Sigma)} &= \lambda p\, p_0 + \mu_2 p_2 \\ (\lambda+\mu_2)\, p_{(1,\Sigma2\Sigma)} &= \lambda q\, p_0 + \mu_1 p_2 \end{aligned}\right\} \text{πλήρας ισορροπίας}$$

$\lambda p_n = (\mu_1+\mu_2)\, p_{n+1}$ → γενικευμένης ισορροπίας

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}\right)^{n-2} p_2 \quad , \; n \geq 2$$

Έτσι έχω να λύσω ένα 4×4 (μόνο!) σύστημα για τα $p_0, p_{(1,\Sigma1\Sigma)}, p_{(1,\Sigma2\Sigma)}, p_2$