



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Διδακτική Απειροστικού Λογισμού

Ενότητα 4: Θέματα σχετικά με τη διδασκαλία της συνέχειας.

Ζαχαριάδης Θεοδόσιος

Τμήμα Μαθηματικών

4. ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1. Σε μια τάξη Γ' Λυκείου στα μαθηματικά κατεύθυνσης έγινε ο παρακάτω διάλογος:

Κ. (καθηγητής): Ποια εικόνα φέρνετε στο μυαλό σας όταν λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της;

Μ. (μαθητής): Μιας καμπύλης που δεν έχει ασυνέχειες, δηλαδή χωρίς κενά ή τρύπες.

Κ.: Τι ακριβώς εννοείς;

Μ.: Μια συνάρτηση είναι συνεχής όταν μπορούμε να την σχεδιάσουμε με ένα μολύβι χωρίς να χρειάζεται να σηκώσουμε το χέρι μας.

α) Περιγράψτε τους διδακτικούς στόχους που πιστεύετε ότι είχε ο Κ. κάνοντας την αρχική ερώτηση;

β) Μετά την τελευταία απάντηση του μαθητή πιστεύετε ότι η συζήτηση πρέπει να συνεχιστεί; Αν όχι γιατί; Αν ναι πως θα τη συνεχίζατε εσείς;

γ) Ποια τοπολογική ιδιότητα περιγράφει τον ισχυρισμό του μαθητή;
2. Ένας καθηγητής έθεσε το παρακάτω πρόβλημα στους μαθητές του:

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[a, \beta]$ και $f(a) > 0, f(\beta) < 0$, τότε τι συμπεράσμα βγάζετε σχετικά με τις ρίζες της συνάρτησης : έχει ρίζες και αν πόσες ρίζες μπορεί να έχει ;

Μ. (μαθητής): Από το θεώρημα Bolzano έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της συνάρτησης στο ανοικτό (a, β) .

Κ. (καθηγητής): Μπορεί η συνάρτηση να τέμνει τον άξονα παραπάνω από μια φορά;

Μ.: Ναι, μπορεί να τον τέμνει 3 ή 5 ή 7 ... φορές οπότε έχει τρεις ρίζες ή πέντε ρίζες κλπ

Κ.: Δηλαδή έχει μόνο περιττό πλήθος ριζών;

Μ.: Ναι.

Κ.: Γιατί;

Μ.: Γιατί αν είχε $a\varsigma$ πούμε δυο ρίζες τότε θα έπρεπε να τέμνει τον άξονα χ'χ δυο φορές αλλά αυτό δεν γίνεται λόγω της υπόθεσης

Κ.: Γιατί;

Μ.: Επειδή, αφού λόγω της υπόθεσης η συνάρτηση είναι πάνω από τον άξονα των x στο $x=a$ και αντίστοιχα κάτω στο $x=\beta$, προκύπτει ότι αν τον έτεμνε δυο φορές θα έπρεπε αρχικά να κατέβει από το a για την πρώτη ρίζα, να περάσει στις αρνητικές τιμές των y , μετά να ανέβει για να τμήσει τον άξονα στην δεύτερη ρίζα οπότε θα περάσει στα θετικά y οπότε για να γυρίσει στο αρνητικό $f(\beta)$ θα έπρεπε να ξανακατέβει άλλη μια φορά και αυτό θα έκανε την συνάρτηση να τμήσει τον άξονα για τρίτη φορά.

α) Ποιοι είναι οι διδακτικοί στόχοι που θέλει να εκπληρώσει ο καθηγητής με το παραπάνω πρόβλημα; Ποια διδακτική μέθοδο πιστεύετε ότι είναι αυτή που εφαρμόζει ο καθηγητής και πόσο αποτελεσματική την θεωρείτε; Δικαιολογήστε την άποψη σας

β) Θα συνεχίζατε το διάλογο από το παραπάνω σημείο; Αν με ποιο τρόπο, αν όχι δικαιολογήστε την απάντησή σας

γ) Πόσο σημαντικό ρόλο θεωρείτε ότι παίζει η επιλογή και χρήση κατάλληλων λέξεων σε ένα μάθημα μαθηματικών;

3. Σε ένα διαγώνισμα στη Γ' Λυκείου στο μάθημα των Μαθηματικών Κατεύθυνσης δόθηκε η παρακάτω ερώτηση:

«Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$ για την οποία ισχύει $f(a) < a$, και $\int_a^\beta f(x)dx \geq \frac{\beta^2 - a^2}{2}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ στο (a, β) ώστε $f(\xi) = \xi$.»

Ένας μαθητής απάντησε ως εξής:

«Εφόσον $f(a) < a$ το σημείο $(a, f(a))$ της γραφικής της f βρίσκεται «κάτω» από το σημείο (a, a) της ευθείας $y = x$. Από την άλλη η σχέση $\int_a^\beta f(x)dx \geq \frac{\beta^2 - a^2}{2}$ σημαίνει

ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την συνάρτηση f και τις ευθείες $x=a$ και $x = \beta$ είναι μεγαλύτερο του αντίστοιχου εμβαδού του τραπεζίου που σχηματίζει η $y = x$ με τις $x = a$ και $x = \beta$. Αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει αν όλη η γραφική παράσταση της συνεχούς f ήταν «κάτω» από την ευθεία $y = x$. Άρα, υπάρχει η στο (a, β) με $f(\eta) > \eta$ και επομένως λόγω της συνέχειας της f οι γραφικές των f και $y=x$ τέμνονται. Άρα θα υπάρχει ξ στο (a, β) ώστε $f(\xi) = \xi$.»

Αν υποθέσουμε ότι ο μαθητής αυτός ήταν στη τάξη σας

α) πως θα βαθμολογούσατε την απάντηση του και γιατί;

β) τι θα του λέγατε σε σχέση με την απάντηση που έδωσε;

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Ζαχαριάδης Θεοδόσιος, 2014. Ζαχαριάδης Θεοδόσιος. «Διδακτική Απειροστικού Λογισμού. Ενότητα 4: Θέματα σχετικά με τη διδασκαλία της συνέχειας.». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH127/>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

