ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Διδακτική Απειροστικού Λογισμού

Ενότητα 3: Θέματα σχετικά με τη διδασκαλία του ορίου.

Ζαχαριάδης Θεοδόσιος

Τμήμα Μαθηματικών

3. ΟΡΙΑ

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

1. Σχεδιάζετε να εισάγετε στην τάξη σας την έννοια του ορίου $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$,

   όπου x_0 και α είναι πραγματικοί αριθμοί.

   α) Περιγράψτε μια εισαγωγική δραστηριότητα που θα μπορούσε να προκαλέσει το ενδιαφέρον των μαθητών για την έννοια.

   Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.β) Πως θα δημιουργούσατε στους μαθητές μια σωστή διαισθητική αντίληψη για την έννοια;

   γ) Ποιες παρανοήσεις θεωρείτε ότι αναπτύσσουν οι μαθητές για την έννοια του ορίου;

   δ) Ποια παραδείγματα θα χρησιμοποιούσατε για να αποκτήσουν οι μαθητές μια καλή εικόνα της έννοιας. Αναφέρατε το στόχο του κάθε παραδείγματος;

2. Ένας μαθητής σας ρωτάει την παρακάτω απορία:

   Για να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to\infty} \eta\mu(x)$ *κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής x=y+π και επειδή ημ(y+π)= - ημ(y) παίρνουμε :*

   $\lim_{x\to\infty} \eta\mu(x) = \lim_{y+\pi\to\infty} \eta\mu(y+\pi) = \lim_{y\to\infty}(-\eta\mu(y)) = -\lim_{y\to\infty} \eta\mu(y) = -\lim_{x\to\infty} \eta\mu(x)$ *από όπου προκύπτει :* $\lim_{x\to\infty} \eta\mu(x) = 0.$

   Στην συνέχεια, κάνοντας πάλι την αλλαγή x = π/2 – z και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ημ(π/2 – z) = συν(z), προκύπτει ότι

   $\lim_{x\to\infty} \sigma\upsilon\nu(x) = \lim_{\pi\to\infty} \eta\mu(\pi/2 - x) = \lim_{z\to\infty}(\eta\mu(-z)) = -\lim_{z\to\infty} \eta\mu(z) = 0$

   Άρα $\lim_{x\to\infty}(\sigma\upsilon\nu^2(x) + \eta\mu^2(x)) = 0^2 + 0^2 = 0$.

   Από την άλλη όμως ισχύει $\lim_{x\to\infty}(\sigma\upsilon\nu^2(x) + \eta\mu^2(x)) = \lim_{x\to\infty}(1) = 1$.

   Που έχω κάνει λάθος;

   α) Που κάνει λάθος ο μαθητής;

   β) Πόσο συνηθισμένο θεωρείτε ότι είναι το παραπάνω λάθος και σε τι οφείλεται;

   γ) Πως θα αντιμετωπίζατε στην τάξη την απορία του μαθητή;

   δ) Θα μπορούσατε να αξιοποιήσετε το παραπάνω λάθος διδακτικά και αν ναι με ποιο τρόπο;

3. Ένας καθηγητής ρώτησε τους μαθητές του την παρακάτω ερώτηση:
«Να βρεθεί, αν υπάρχει το $\lim_{x\to 3}(f(x)+g(x))$ όπου f(x)= $\sqrt{x^2-9}$, g(x)= $\sqrt{3-x}$ »

Ένας μαθητής απάντησε ως εξής:

$$\lim_{x\to 3}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to 3} f(x) + \lim_{x\to 3} g(x) = 0+0=0$$

α) Ποια είναι η γνώμη σας για την ερώτηση του καθηγητή; Θεωρείτε ότι έχει ενδιαφέρον ή όχι; Αιτιολογείστε την απάντηση σας.

β) Πως θα διαχειριζόσασταν διδακτικά στην τάξη την απάντηση του μαθητή;

4. Ένας καθηγητής ζήτησε από τους μαθητές του να υπολογίσουν το $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

Ένας μαθητής έγραψε στον πίνακα

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2} x+2 = 4$$

α) Ποιος θεωρείτε ότι είναι ο στόχος της παραπάνω άσκησης;

β) Ποιες ιδιότητες των ορίων χρησιμοποίησε ο μαθητής στην παραπάνω απόδειξη;

γ) Μετά τη λύση που έγραψε ο μαθητής στον πίνακα θα συζητούσατε στην τάξη για αυτή την άσκηση; Αν ναι για ποιον λόγο;

δ) Αν η απάντηση σας στο γ) είναι θετική πως θα συνεχίζατε τη συζήτηση στην τάξη;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Ι. Εισαγωγή στις Άπειρες Διαδικασίες

Θέμα της Δραστηριότητας

Η δραστηριότητα αυτή είναι μια εισαγωγή στις άπειρες διαδικασίες. Η εισαγωγή αυτή επιτυγχάνεται με την εφαρμογή της μεθόδου της εξάντλησης των Αρχιμήδη-Ευδόξου για τον υπολογισμό του εμβαδού του κύκλου.

Στόχοι της Δραστηριότητας

- Με τη δραστηριότητα αυτή επιδιώκεται οι μαθητές:
  - Να οδηγηθούν με φυσιολογικό τρόπο στην ανάγκη χρήσης άπειρων διαδικασιών για την επίλυση προβλημάτων, τα οποία δεν μπορούν να λυθούν με διαφορετικό τρόπο.
  - Να γνωρίσουν τη μέθοδο της εξάντλησης (και της ιδέας του απείρου που υπάρχει σε αυτήν) σε ένα περιβάλλον απαλλαγμένο από αλγεβρικούς υπολογισμούς.
  - Να αρχίσουν να εξοικειώνονται στην εναλλαγή αναπαραστάσεων μέσα από το παρεχόμενο περιβάλλον στο οποίο συνδυάζονται αρμονικά γραφικές και αριθμητικές αναπαραστάσεις.

Λογική της Δραστηριότητας

Αυτή η δραστηριότητα εισάγει τους μαθητές σε άπειρες διαδικασίες, μέσω του προβλήματος του υπολογισμού του εμβαδού του μοναδιαίου κύκλου. Οι προ υπάρχουσες γνώσεις των μαθητών δεν επαρκούν για τη λύση αυτού του προβλήματος επειδή ο κύκλος δεν είναι δυνατόν να χωριστεί σε πολύγωνα. Μπορούν όμως να χρησιμοποιηθούν οι γνώσεις των μαθητών για τα πολύγωνα προκειμένου να προσεγγιστεί το άγνωστο εμβαδόν. Η έννοια της άπειρης διαδικασίας έρχεται με φυσιολογικό τρόπο ως εργαλείο το οποίο επιτρέπει την οσοδήποτε κοντά προσέγγιση μιας άγνωστης ποσότητας μέσα από άπειρες το πλήθος γνωστές. Η ιδέα αυτή δημιουργεί και το κατάλληλο έδαφος για τη μετέπειτα εισαγωγή των μαθητών στην έννοια του ορίου. Η χρήση του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, εκτός από τη γραφική αναπαράσταση του προβλήματος, απαλλάσσει τους μαθητές από τις υπολογιστικές δυσκολίες που εμπεριέχονται στον υπολογισμό των εμβαδών των πολυγώνων, δίνοντας έτσι τη δυνατότητα να επικεντρώσουν το ενδιαφέρον τους στην άπειρη διαδικασία.

Δραστηριότητα και Αναλυτικό Πρόγραμμα

Η δραστηριότητα αυτή μπορεί να προσφερθεί σε ένα εισαγωγικό μάθημα Απειροστικού Λογισμού. Οι μαθητές στο επίπεδο αυτό δεν γνωρίζουν άπειρες διαδικασίες. Η δραστηριότητα μπορεί να πραγματοποιηθεί στα χρονικά πλαίσια μιας διδακτικής ώρας.

Φύλλο εργασίας

Πρόβλημα: Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδό ενός κύκλου με ακτίνα R=1?

Αυτό είναι το γενικό πρόβλημα που θα εισάγει τους μαθητές στην άπειρη διαδικασία.
Αναμένεται κάποιοι από τους μαθητές να γνωρίζουν τον τύπο που δίνει το εμβαδό του κύκλου και κατά πάσα πιθανότητα να δοθεί η απάντηση ότι το ζητούμενο εμβαδό ισούται με π.
Στην περίπτωση αυτή μπορεί να γίνει κάποια συζήτηση με ενδεχόμενες αφορμές τις παρακάτω ερωτήσεις:
Γιατί το εμβαδόν ισούται με π;
Πώς προκύπτει ο τύπος $E = \pi R^2$;
Πώς μπορεί να υπολογιστεί το π;
Προκειμένου να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημά μας, αρχίζουμε με τρεις ερωτήσεις που σχετίζονται με τις βασικές γνώσεις της μέτρησης εμβαδού.

Ε1: Τι σημαίνει ότι ένα τρίγωνο έχει εμβαδό ίσο με 4,5;

Αυτό σημαίνει ότι τέσσερα και μισό τετράγωνα πλευράς 1 μπορούν να καλύψουν ακριβώς την επιφάνεια του τριγώνου. Μπορεί να γίνει κάποια συζήτηση για τη μέτρηση εμβαδού καθώς και για την έννοια της μονάδας μέτρησης εμβαδού.

Ε2: Βρείτε γεωμετρικά σχήματα των οποίων το εμβαδό μπορεί να υπολογιστεί με την προηγούμενη μέθοδο.

Με την προηγούμενη μέθοδο μπορούμε να υπολογίσουμε εμβαδά πολυγώνων.
Μπορεί να γίνει συζήτηση για τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουμε το εμβαδό πολυγώνων, χωρίζοντάς τα σε μικρότερα ευθύγραμμα σχήματα των οποίων τα εμβαδά μπορούμε να τα υπολογίσουμε.

Ε3: Μπορούμε να χωρίσουμε τον κύκλο σε σχήματα των οποίων τα

εμβαδά μπορούμε να τα υπολογίσουμε;

Η ερώτηση αυτή είναι ισοδύναμη με την ερώτηση “μπορούμε να χωρίσουμε τον κύκλο σε πολύγωνα;”.
Οι πλευρές των πολυγώνων είναι ευθύγραμμα τμήματα και κατά συνέπεια ο κύκλος δεν μπορεί να χωριστεί σε πολύγωνα. Από την αρνητική απάντηση προκύπτει η επόμενη ερώτηση.

Ε4: Με ποιο τρόπο είναι δυνατόν να συνδέσουμε το εμβαδό του κύκλου με τα εμβαδά πολυγώνων;

Κάποια συζήτηση μπορεί να προκύψει από τις απαντήσεις των μαθητών.
Στόχος της συζήτησης είναι να οδηγηθούμε στην ιδέα ότι μπορούμε να βρούμε πολύγωνα με εμβαδό μεγαλύτερο από αυτό του κύκλου και πολύγωνα με εμβαδό μικρότερο από αυτό του κύκλου (πχ πολύγωνα εγγεγραμμένα ή περιγεγραμμένα στον κύκλο)

Κατασκευάστε δυο τετράγωνα: Ένα εγγεγραμμένο και ένα περιγεγραμμένο στον κύκλο.
Προσπαθήστε να απαντήσετε στην ερώτηση χρησιμοποιώντας το αρχείο του Geogebra.
Στο περιβάλλον:

Μπορούμε να δούμε τον κύκλο.
Οι δύο δρομείς μεταβάλλουν την ακτίνα ρ του κύκλου και το πλήθος ν των πλευρών του κανονικού εγγεγραμμένου και του κανονικού περιγεγραμμένου πολυγώνου στον κύκλο.
Εμφανίζονται τα εμβαδά αυτών των πολυγώνων και η διαφορά τους.

Ε5: Ποια σχέση υπάρχει ανάμεσα στο εμβαδό E του κύκλου και τα εμβαδά των δύο αυτών τετραγώνων;

Ε6: Ποια είναι η διαφορά των εμβαδών των δύο τετραγώνων;

Με τα παραπάνω εμβαδά επιτυγχάνουμε μια πρώτη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού Ε. Η προσέγγιση αυτή προφανώς δεν είναι πολύ καλή. Έτσι προκύπτει η επόμενη ερώτηση.

Ε7: Μέσω ποιας διαδικασίας είναι δυνατόν να επιτύχουμε καλύτερη προσέγγιση του E ;

Αυτή η ερώτηση είναι το κρίσιμο σημείο για να περάσουν οι μαθητές στην έννοια των διαδοχικών προσεγγίσεων. Οι μαθητές ενδεχομένως μπορούν να εικάσουν ότι η αύξηση στον αριθμό των πλευρών μπορεί να επιφέρει καλύτερες προσεγγίσεις.
Ο διδάσκων μπορεί να παροτρύνει τους μαθητές να εστιάσουν στη διαφορά του εσωτερικού από το εξωτερικό πολύγωνο καθώς το ν μεγαλώνει. Η διαφορά μας δείχνει πόσο κοντά βρισκόμαστε στο ζητούμενο εμβαδό του κύκλου.
Κατασκευάζουμε το εσωτερικό και εξωτερικό κανονικό πεντάγωνο, επιτυγχάνοντας έτσι καλύτερη προσέγγιση του εμβαδού του κύκλου. Οι μαθητές μπορούν να πειραματιστούν με μεγαλύτερο αριθμό πλευρών.
Καθώς ο αριθμός των πλευρών αυξάνεται, τα πολύγωνα δείχνουν να ταυτίζονται με τον κύκλο ενώ στην πραγματικότητα αυτό δεν συμβαίνει. Αν ορισμένοι μαθητές προβληματίζονται μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μεγέθυνση. Το ενδιαφέρον μετατοπίζεται στα αριθμητικά αποτελέσματα.

Ε8: Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

ν	Εμβαδό Εγγεγραμμένου ν-γώνου	Εμβαδό Περιγεγραμμένου ν-γώνου	Διαφορά των εμβαδών μικρότερη ή ίση από
4			
5			
6			
10			
12			
(18)			0,09
(23)	3,1…	3,1…	
(56)			0,009
(114)	3,14…	3,14….	
(177)			0,0009
(187)	3,141…	3,141…	
(243)			

(559)			0,00009

Στην ερώτηση αυτή οι μαθητές συμπληρώνουν τα κενά κελιά στον πίνακα. Τα αριθμητικά δεδομένα του πίνακα έχουν στόχο να κάνουν οι μαθητές κάποιες εικασίες σχετικές με τη σύγκλιση των τριών ακολουθιών.
Για τους αριθμούς όπως ο 0,09 που δίδονται στον πίνακα αναμένεται από τους μαθητές να βρουν κάποια τιμή του ν τέτοια ώστε η διαφορά των δυο εμβαδών να είναι μικρότερη του 0,09 .
3,14… σημαίνει ότι το πλήθος των πλευρών είναι τέτοιο ώστε και το εσωτερικό και το εξωτερικό πολύγωνο έχουν εμβαδά με τα πρώτα δύο δεκαδικά τους ψηφία ίσα.
Στις παραπάνω ερωτήσεις οι απαντήσεις των μαθητών μπορεί να διαφέρουν.

Ε9: Υπάρχει κάποιο βήμα στη διαδικασία αυτή όπου το περιγεγραμμένο και το εγγεγραμμένο πολύγωνο θα έχουν το ίδιο εμβαδό με εκείνο του κύκλου;

Προφανώς, κανένα πολύγωνο δεν μπορεί να συμπέσει με τον κύκλο.

Ε10: Θα τερματίσει αυτή η διαδικασία;

Αφού η διαδικασία δεν τερματίζεται μπορεί να συνεχιστεί απεριόριστα. Δηλαδή, μπορούμε πάντοτε να πάρουμε πολύγωνα με περισσότερες πλευρές. Στο σημείο αυτό γίνεται το πέρασμα στις άπειρες διαδικασίες.

Ε11: Η διαφορά των εμβαδών ποιον αριθμό πλησιάζει;

Η διαφορά πλησιάζει το 0 όσο το πλήθος των πλευρών μεγαλώνει.

Ε12: Πόσο κοντά στον αριθμό αυτό μπορεί να φτάσει η διαφορά των εμβαδών;

Μπορούμε να βρεθούμε οσοδήποτε κοντά στο 0, αρκεί να επιλέξουμε κατάλληλα μεγάλο αριθμό πλευρών.

Ε13: Πόσο κοντά στο εμβαδό του κύκλου μπορούμε να φτάσουμε;

Σε συνδυασμό με την προηγούμενη ερώτηση μπορούμε να βρεθούμε οσοδήποτε κοντά στο εμβαδό του κύκλου.

II. Εισαγωγή στο όριο συνάρτησης σε σημείο

Θέμα της Δραστηριότητας

Η δραστηριότητα αυτή, με αφορμή τον υπολογισμό της στιγμιαίας ταχύτητας, εισάγει στο όριο συνάρτησης σε σημείο.

Στόχοι της Δραστηριότητας

Με τη δραστηριότητα αυτή επιδιώκεται οι μαθητές:

- Να εισαχθούν διαισθητικά στον ε-δ ορισμό του ορίου συνάρτησης σε σημείο.
- Να συνδέσουν αρμονικά την αριθμητική και τη γραφική αναπαράσταση του προβλήματος προκειμένου να γίνει κατανοητή η έννοια του ορίου συνάρτησης.

Λογική της Δραστηριότητας

Η δραστηριότητα χρησιμοποιεί σαν αφορμή ένα πρόβλημα στιγμιαίας ταχύτητας. Από την καθημερινή ζωή οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με την έννοια της ταχύτητας μολονότι η έννοια της στιγμιαίας ταχύτητας περιλαμβάνει (έστω και κρυμμένη) οριακή διαδικασία. Στη διαδικασία αυτή, η χρήση του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας λειτουργεί με δύο τρόπους. Στο πρώτο μέρος του φύλλου εργασίας παρέχει αριθμητικά αποτελέσματα. Αυτό δίνει τη δυνατότητα να εξοικονομηθεί ο χρόνος που θα χρειαζόταν για υπολογισμούς. Στο δεύτερο μέρος του φύλλου εργασίας, τα αριθμητικά δεδομένα αναπαρίστανται γραφικά. Με τον τρόπο αυτόν οι μαθητές μπορούν να οπτικοποιήσουν την έννοια της σύγκλισης και να μεταβούν ομαλά στον ε-δ ορισμό. Η χρήση των ζωνών του ε και του δ στο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να χειριστούν δυναμικά τις θεμελιώδεις παραμέτρους του προβλήματος, προκειμένου να κατανοήσουν τη σχέση του δ με το ε. Η χρήση της κόκκινης και πράσινης περιοχής δεν χρησιμοποιείται σαν οπτικό εφέ, αλλά σαν εργαλείο που επιτρέπει την λεκτική αναπαράσταση σύνθετων εκφράσεων. Για παράδειγμα η έκφραση: «όλα τα ζεύγη (x,f(x)) για τα οποία $x \in (T-\delta, T+\delta)$ και $f(x) \in (U-\varepsilon, U+\varepsilon)$» μπορεί απλά να δοθεί ως: «το κομμάτι της γραφικής παράστασης που βρίσκεται στην πράσινη περιοχή».

Δραστηριότητα και Αναλυτικό Πρόγραμμα

Αυτή η δραστηριότητα μπορεί να πραγματοποιηθεί σε ένα μάθημα μιας ώρας, σαν εισαγωγή στην έννοια του ορίου συνάρτησης σε σημείο. Ανάλογα με το επίπεδο των μαθητών και τους εκάστοτε διδακτικούς στόχους, η δραστηριότητα μπορεί είτε να οδηγήσει σε μια διαισθητική προσέγγιση του ορισμού της σύγκλισης συνάρτησης σε σημείο, είτε στον ε-δ ορισμό.

Φύλλο εργασίας

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Μια κάμερα καταγράφει έναν αγώνα των 100m.

Με ποιο τρόπο θα μπορούσαν τα δεδομένα της κάμερας να μας βοηθήσουν στον υπολογισμό της ταχύτητας ενός αθλητή κατά τη χρονική στιγμή *T*=6sec;

- Ανοίξτε το αρχείο του Geogebra. Στο περιβάλλον αυτό μπορούμε να έχουμε τα δεδομένα της κάμερας.
- Όταν αλλάζουμε τις τιμές του t αλλάζουν και οι τιμές του *s(t)* που δίνουν την απόσταση που έχει καλύψει ο αθλητής έως τη χρονική στιγμή *t*.
- Το *t* μπορεί να πλησιάσει το *T* από μικρότερες και από μεγαλύτερες τιμές.
- Εμφανίστε τη μέση ταχύτητα τη μέση ταχύτητα U(t) = $\dfrac{s(T)-s(t)}{T-t}$ στο διάστημα που ορίζουν τα *t* και *T*.

Ε1: Συμπληρώστε τα κενά στον παρακάτω πίνακα.

t	$\dfrac{s(T)-s(t)}{T-t}$	t	$\dfrac{s(T)-s(t)}{T-t}$
4		8	
5		7	
5,5		6,5	
5,8		6,3	
5,9		6,1	
5,93		6,07	
5,95		6,03	
5,99		6,01	
5,995		6,005	
5,999		6,001	
5,9999		6,0001	
5,99999		6,00001	

Μπορεί να γίνει κάποια συζήτηση για την έννοια της μέσης ταχύτητας.
Ενδέχεται να παρατηρήσουν οι μαθητές ότι στο περιβάλλον του Geogebra η μέση ταχύτητα δεν αλλάζει τιμή όταν από κάποια τιμή του *t* (μικρότερη ή μεγαλύτερη) μεταβούμε στην τιμή 6. Αυτό οφείλεται στο ότι η ποσότητα *T-t* γίνεται ίση με μηδέν και η μέση ταχύτητα δεν έχει νόημα καθώς ο παρονομαστής γίνεται ίσος με μηδέν.

Ε2: Ποιον αριθμό πλησιάζει η μέση ταχύτητα καθώς το *t* πλησιάζει το *T*=6sec?

- Εμφανίστε τη συνάρτηση της μέσης ταχύτητας στο αρχείο του Geogebra και επιβεβαιώστε γραφικά την απάντησή σας.

Καθώς το t πλησιάζει το T από δεξιά και από αριστερά μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η μέση ταχύτητα πλησιάζει τα 10m/sec. Είναι χρήσιμο να τονίσουμε στους μαθητές ότι το t μπορεί να βρεθεί οσοδήποτε κοντά στο T όμως δεν μπορεί να γίνει ίσο.

Ε2: Ποια νομίζετε ότι είναι η ταχύτητα του αθλητή τη χρονική στιγμή *T*=6sec?

- Εμφανίστε την ε-ζώνη στο αρχείο του Geogebra. Τα σημεία της ε-ζώνης έχουν τεταγμένη μεγαλύτερη από L-ε και μικρότερη από $L+\varepsilon$.
- Μετακινήστε το t έτσι ώστε το σημείο $(t,U(t))$ να βρεθεί στην ε-ζώνη και παρατηρήστε τις τιμές της μέσης ταχύτητας.

Ε3: Για ποιες τιμές του *t* το σημείο (*t, U(t)*) ανήκει στην *ε*-ζώνη για *ε*=0,8;

- Στην απάντηση αυτής της ερώτησης βοηθάει η δ-ζώνη. Τα σημεία που ανήκουν στη δ-ζώνη έχουν τετμημένη μεγαλύτερη του T-δ και μικρότερη του $T+\delta$. Με πράσινο χρωματίζονται τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται ταυτόχρονα στην ε-ζώνη και στη δ-ζώνη. Τα σημεία της δ-ζώνης που είναι εκτός της ε-ζώνης χρωματίζονται με κόκκινο.

Οι μαθητές μπορούν να πειραματιστούν κινώντας το t και παρατηρώντας τη μεταβολή του $U(t)$.

Ε4: Προσπαθήστε να βρείτε ένα *δ* τέτοιο ώστε να μην υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης στην κόκκινη περιοχή.

Εάν για παράδειγμα βάλουμε για δ το 0,7 έχουμε το ζητούμενο.

Ε5: Μειώστε το *ε* σε 0,5 και βρείτε κατάλληλο *δ* ώστε τα σημεία (t, *U(t)*) να μην βρίσκονται στην κόκκινη περιοχή.

πχ δ = 0,4

Ε6: Εάν *ε*=0,05 μπορείτε να βρείτε *δ* με την παραπάνω ιδιότητα;

- Μπορείτε να εμφανίσετε το παράθυρο μεγέθυνσης. Μπορεί να σας βοηθήσει ώστε να δείτε σε μια μικρή περιοχή γύρω από το σημείο (T,L).

πχ δ=0,05

Ε7: Εάν το *ε* μικρύνει κι άλλο θα μπορούμε πάντα να βρούμε *δ* με την παραπάνω ιδιότητα;

Οι μαθητές μπορούν να πειραματιστούν με ολοένα και μικρότερες τιμές του ε και να «συμπεράνουν» ότι πάντοτε μπορούν να βρουν ένα δ.

Ε8: Συμπληρώστε τα κενά της παρακάτω πρότασης με τα κατάλληλα χρώματα ώστε να εκφράζει το συμπέρασμα της Ε7.

“Για κάθε *ε*>0 μπορούμε να βρούμε *δ*>0 τέτοιο ώστε η συνάρτηση να μην βρίσκεται στην ……κόκκινη ………. περιοχή.”

Στην πρόταση αυτή ίσως χρειάζεται λίγη προσοχή, γιατί μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές σε παρανόηση. Μπορεί να πιστέψουν ότι ακόμη και εάν η συνάρτηση ήταν ορισμένη στο *T* τότε θα έπρεπε η τιμή *L=f(T)* να μην βρίσκεται στην κόκκινη περιοχή. Αυτή η δραστηριότητα δεν δίνει αφορμή για να ξεκαθαριστεί ότι δεν μας ενδιαφέρει τι συμβαίνει στο *T* αλλά μόνο τι συμβαίνει γύρω από το *T*. Σε κάποια επόμενη δραστηριότητα θα ήταν καλό να διευκρινιστεί ότι όταν εξετάζουμε την ύπαρξη ορίου σε σημείο, η τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό (εάν υπάρχει) μπορεί να βρίσκεται στην κόκκινη περιοχή.

Ε9: Συμπληρώστε τα κενά ώστε η παρακάτω πρόταση να αποδίδει το συμπέρασμα της Ε7.

Τα ………*U(t)*……….. μπορούν να είναι όσο κοντά θέλουμε στο ……*L*…… αρκεί τα ………*t*……. να είναι κατάλληλα κοντά στο ……*T*………… και διαφορετικά του ……*T*…….

Ε10: Προσπαθήστε να διατυπώσετε το συμπέρασμα της Ε7, χρησιμοποιώντας μαθηματικά σύμβολα.

Αυτό είναι το πιο κρίσιμο σημείο και ενδεχομένως μπορεί να γίνει κάποια συζήτηση με αφορμή τις απαντήσεις των μαθητών. Ο καθηγητής μπορεί να υπενθυμίσει στους μαθητές ότι η απόσταση δυο αριθμών ισούται με την απόλυτη τιμή της διαφοράς τους. Στόχος αυτής της ερώτησης είναι να δοθεί ο ε-δ ορισμός του ορίου συνάρτησης σε σημείο.

Για κάθε *ε*>0 υπάρχει *δ*>0 τέτοιο ώστε εάν $t \in (T-\delta, T+\delta)$ με $t \neq T$ τότε $U(t) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

ή ισοδύναμα

για κάθε *ε*>0 υπάρχει *δ*>0 τέτοιο ώστε εάν $0 < |t-T| < \delta$ τότε $|U(t)-L| < \varepsilon$

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Ζαχαριάδης Θεοδόσιος. «Διδακτική Απειροστικού Λογισμού. Ενότητα 3: Θέματα σχετικά με τη διδασκαλία του ορίου.». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH127/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.