ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Διδακτική Απειροστικού Λογισμού

Ενότητα 1: Γενικά θέματα σχετικά με τη διδασκαλία των Μαθηματικών

Ζαχαριάδης Θεοδόσιος

Τμήμα Μαθηματικών

1. ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΣΚΟΠΟΙ ΚΑΙ ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τα αίτια της δημιουργίας και της ανάπτυξης των Μαθηματικών ήταν και είναι η λύση εξωτερικών και εσωτερικών προβλημάτων. Με τον όρο εξωτερικά προβλήματα εννοούμε πρακτικά προβλήματα της καθημερινής ζωής, τα οποία οδήγησαν και στη δημιουργία των πρώτων Μαθηματικών, ή προβλήματα που τίθενται από άλλες επιστήμες και που η λύση τους ανάγεται στη λύση μαθηματικού προβλήματος. Με τον όρο εσωτερικά προβλήματα εννοούμε προβλήματα που προέκυψαν από την ίδια την ανάπτυξη των Μαθηματικών.

Για ποιο λόγο όμως τα μαθηματικά έχουν το ειδικό βάρος που έχουν στη σχολική εκπαίδευση; Ποιοι είναι οι κεντρικοί στόχοι της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο σχολείο; Μέσα από τη διδασκαλία των Μαθηματικών επιδιώκουμε να αναπτύξει ο σημερινός μαθητής και αυριανός πολίτης εκείνες τις γνώσεις και δεξιότητες που χρειάζεται για να κατανοεί την κοινωνία στην οποία ζει, να κατανοεί τον Φυσικό κόσμο και να αναπτύξει λογική σκέψη

Για την επίτευξη των παραπάνω σκοπών τίθενται επιμέρους στόχοι, ανάλογα και με την εκπαιδευτική βαθμίδα που διδάσκουμε, όπως ο μαθητής:

- να κατανοεί έννοιες, μαθηματικές διαδικασίες, γεγονότα και αρχές.
- να εκτελεί πράξεις και να ακολουθεί διαδικασίες με ακρίβεια και ταχύτητα.
- να είναι ικανός να λύνει προβλήματα.
- να κατανοεί τη λογική δομή μιας απόδειξης.
- να αναπτύσσει θετικές στάσεις, να του προκαλείται το ενδιαφέρον και η περιέργεια και να αναπτύσσει πρωτοβουλίες.
- να αναπτύσσει αποδοτικούς τρόπους μάθησης και επικοινωνίας στα μαθηματικά, καθώς και συνήθειες μελέτης και αναζήτησης της γνώσης για αυτόνομη πρόοδο.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σύμφωνα με τους Φιλίππου και Χρίστου (1995), ορισμένες γενικές αρχές που πρέπει να διέπουν τη διδασκαλία των Μαθηματικών είναι οι παρακάτω:

i) Η μάθηση στα Μαθηματικά πρέπει να είναι εννοιολογική.

Η εκμάθηση κανόνων και διαδικασιών χωρίς κατανόηση μπορεί να έχει βραχυπρόθεσμα αποτελέσματα, αλλά δεν οδηγεί σε ουσιαστική ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης του μαθητή. Επίσης μακροπρόθεσμα δεν μένει τίποτα στο μαθητή γιατί ο χρόνος ενεργεί καταλυτικά στη μνήμη του.

ii) Η μάθηση στα Μαθηματικά πρέπει να ακολουθεί αναπτυξιακή διαδικασία.

Οι βάσεις, τα θεμέλια μιας μαθηματικής θεωρίας είναι τα αξιώματα. Συνδυάζοντας τα αξιώματα με βάση λογικούς κανόνες αποδεικνύουμε νέες ιδιότητες, τις προτάσεις και τα θεωρήματα. Κάθε φορά για να αποδείξουμε κάτι νέο στηριζόμαστε στα αξιώματα και στις ιδιότητες που έχουμε αποδείξει μέχρι τότε. Επίσης, ορίζουμε νέες έννοιες οι ορισμοί των οποίων βασίζονται στις πρωταρχικές έννοιες, σε έννοιες που έχουμε ήδη ορίσει και στις ιδιότητες που έχουμε ήδη αποδείξει. Συνεπώς, και η μάθηση

των μαθηματικών είναι μια συνεχής διαδικασία αφομοίωσης νέων δεδομένων και πληροφοριών που στηρίζονται και ενσωματώνονται στις υπάρχουσες γνώσεις.
Ο ρόλος του εκπαιδευτικού σε αυτή τη διαδικασία είναι:

- η ετοιμασία ποικίλων δραστηριοτήτων που θα βοηθήσουν τους μαθητές να αντιληφθούν τις έννοιες,
- η δημιουργία κατάλληλου περιβάλλοντος για παροχή ευκαιριών στους μαθητές να εξερευνήσουν με διάφορους τρόπους τις μαθηματικές έννοιες,
- η καθοδήγηση των μαθητών για να οικοδομήσουν τις έννοιες στηριζόμενοι στις προ υπάρχουσες άτυπες και τυπικές γνώσεις τους.

iii) Η οργάνωση του αναλυτικού προγράμματος πρέπει να είναι σπειροειδής.

Όπως αναφέρθηκε στο ii), τα μαθηματικά στηρίζονται σε προηγούμενες γνώσεις. Η σωστή ιεράρχηση των μαθηματικών ιδεών είναι πολύ σημαντική. Η σπειροειδής ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών από τάξη σε τάξη και από κεφάλαιο σε κεφάλαιο είναι ουσιώδης στην κατάκτηση των μαθηματικών εννοιών. Με τη σπειροειδή μορφή του αναλυτικού προγράμματος κάθε έννοια οικοδομείται με βάση τις προηγούμενες έννοιες και επεκτείνεται με τρόπο που να καλύπτει όλο και μεγαλύτερο φάσμα των ιδιοτήτων της.
Η υιοθέτηση της αρχής της σπειροειδούς ανάπτυξης του αναλυτικού προγράμματος απαιτεί από τον εκπαιδευτικό στον προγραμματισμό της εργασίας του

- να λαμβάνει υπόψη του τις προαπαιτούμενες γνώσεις κάθε έννοιας που πρόκειται να διδάξει καθώς και τις σχετικές με αυτές αδυναμίες των μαθητών
- να γνωρίζει την ύλη όχι μόνο της τάξης του αλλά και των προηγούμενων και επόμενων τάξεων.

iv) Τα κίνητρα των μαθητών επηρεάζουν τη μαθησιακή διαδικασία και αντίστροφα.

Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να προγραμματίζει δραστηριότητες που θα προκαλέσουν το ενδιαφέρον των μαθητών και που θα μπορούν να τις εκτελέσουν με επιτυχία. Η έρευνα έχει δείξει ότι ενδιαφέρουσες δραστηριότητες διεγείρουν την περιέργεια των μαθητών. Παράλληλα, η επιτυχία σε αυτές οδηγεί στην ανάπτυξη αυτοπεποίθησης στους μαθητές ότι είναι ικανοί να κάνουν μαθηματικά. Αυτό έχει ως συνέπεια περισσότερη προσπάθεια, βαθύτερη κατανόηση και ακόμη καλύτερες επιδόσεις.

v) Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν τι αναμένεται να μάθουν.

Η γνώση του τελικού στόχου από τους μαθητές έχει αποδειχθεί ότι δημιουργεί μεγαλύτερο ενδιαφέρον και συμμετοχή.

vi) Οι μαθητές πρέπει να συμμετέχουν ενεργά στη διδακτική διαδικασία.

Η ενεργός συμμετοχή των μαθητών είναι ιδιαίτερα σημαντική προκειμένου οι να αποκτήσουν θετική στάση απέναντι στο μάθημα και να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες. Πρωταρχικός ρόλος του εκπαιδευτικού πρέπει να είναι η επιλογή δραστηριοτήτων για την ενεργό συμμετοχή των μαθητών.

vii) Οι μαθητές πρέπει να αποκτήσουν ικανότητα μαθηματικής επικοινωνίας.

Τα μαθηματικά είναι μια γλώσσα με τα δικά της σύμβολα και τους δικούς της ιδιαίτερους κώδικες επικοινωνίας. Οι μαθητές πρέπει να αποκτήσουν την ικανότητα να περιγράφουν με ακρίβεια τα βήματα που ακολουθούν σε μια διαδικασία σκέψης, να διατυπώνουν επιχειρήματα και να τα εκφράζουν με σαφήνεια ώστε να γίνονται κατανοητά από τους άλλους. Γενικότερα, οι μαθητές πρέπει να μπορούν να αποτυπώνουν τα αποτελέσματα της εργασίας τους τόσο στη φυσική γλώσσα όσο και με χρήση μαθηματικών συμβόλων αλλά και άλλων μέσων αναπαράστασης (π.χ., διαγράμματα, δυναμικά ψηφιακά δομήματα, κ.ά.). Η ικανότητα για επικοινωνία στα μαθηματικά και για τα μαθηματικά αποτελεί βασικό στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης.

viii) Η χρήση ποικιλίας εποπτικών μέσων συμβάλλει στη μάθηση.

Η μαθηματική σκέψη από τη φύση της είναι πολύ αφηρημένη. Γι' αυτό οποιοδήποτε εποπτικό μέσον μπορεί να εκφράσει μια μαθηματική ιδέα, αν και δεν είναι δυνατόν να την αποδώσει πλήρως, μπορεί να συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση της.

ix) Η διδασκαλία πρέπει να βοηθάει τους μαθητές να διατηρήσουν στη μνήμη τους τις βασικές έννοιες.

Μια μαθηματική έννοια ή ένα θεώρημα μπορεί σύντομα να ξεχαστεί. Συνήθως κανόνες και διαδικασίες που μαθαίνονται μηχανικά ξεχνιούνται γρήγορα. Το ίδιο συμβαίνει και με ασύνδετες γνώσεις ή ορισμούς. Η διατήρηση των εννοιών στη μνήμη των μαθητών πρέπει να αποτελεί βασικό στόχο της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Η εννοιολογική κατανόηση και η ουσιαστική συμμετοχή των μαθητών στην «ανακάλυψη» των εννοιών βοηθά ουσιαστικά ώστε αυτές να γίνουν κτήμα τους και να μην ξεχαστούν γρήγορα. Επίσης, τη διατήρηση στη μνήμη των μαθητών των βασικών εννοιών βοηθάει και η σύντομη επανάληψη και χρήση των προ απαιτούμενων γνώσεων κατά τη διάρκεια εισαγωγής μιας νέας έννοιας

Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΟΡΙΣΜΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σύμφωνα με τους D. Tall και S. Vinner (1981), με τον όρο «εικόνα έννοιας» (concept image) περιγράφουμε ολόκληρη τη γνωστική δομή η οποία σχετίζεται με μία έννοια. Αυτή η γνωστική δομή περιλαμβάνει όλες τις νοητικές εικόνες, διαδικασίες και ιδιότητες που συνδέονται με την έννοια. Η εικόνα μιας έννοιας που έχει διαμορφώσει ένα άτομο δομείται μέσα από τις εμπειρίες του και μεταβάλλεται καθώς το άτομο αυτό ωριμάζει μαθηματικά και συναντά νέα ερεθίσματα που συνδέονται με την έννοια. Η εικόνα μιας έννοιας περιλαμβάνει τον ορισμό της έννοιας (concept definition) που γνωρίζει το άτομο (αν γνωρίζει), αλλά είναι κάτι ευρύτερο. Η κατανόηση μιας έννοιας προϋποθέτει το σχηματισμό μιας εικόνας έννοιας γι' αυτήν. Η αποστήθιση του τυπικού ορισμού της δεν εγγυάται την κατανόηση της. Για να την κατανοήσουμε πρέπει να διαθέτουμε μια σωστή εικόνα της.

Στο πλαίσιο της καθημερινής ζωής οι περισσότερες έννοιες, όπως π.χ. σπίτι, πορτοκάλι, αυτοκίνητο, γάτα, κ.α., κατανοούνται χωρίς οποιαδήποτε χρήση ορισμών. Υπάρχουν όμως μερικές έννοιες της καθημερινής ζωής οι οποίες μπορεί να εισαχθούν μέσω ορισμών. Π.χ. η λέξη «δάσος» μπορεί να εξηγηθεί σε ένα παιδί με την φράση «πάρα πολλά δέντρα μαζί». Ορισμοί όπως αυτός βοηθούν να σχηματιστεί μια εικόνα της έννοιας. Από τη στιγμή όμως που σχηματίζεται μια εικόνα αυτής της έννοιας ο ορισμός παύει να χρησιμοποιείται. Θα παραμείνει ανενεργός ή ακόμα θα ξεχαστεί και κατά το χειρισμό των προτάσεων που σχετίζονται με την έννοια θα γίνεται χρήση μόνο της εικόνας που δημιουργήθηκε.

Στα Μαθηματικά όμως, οι ορισμοί έχουν διαφορετικό και εξαιρετικά σημαντικό ρόλο σε σχέση με αυτόν που έχουν στην καθημερινή ζωή. Όχι μόνο βοηθούν στο σχηματισμό της εικόνας της έννοιας αλλά διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο. Συνεπώς, στα Μαθηματικά απαιτούνται κάποιες νοητικές συνήθειες που είναι εντελώς διαφορετικές από εκείνες που χρησιμοποιούνται στο πλαίσιο της καθημερινής ζωής. Είναι όμως πολύ πιθανό, τουλάχιστον στην αρχή της διαδικασίας της μάθησης, οι νοητικές συνήθειες που διαμορφώνονται από την καθημερινή ζωή να κυριαρχήσουν πάνω στις νοητικές συνήθειες που απαιτούνται στα Μαθηματικά. Στη συνέχεια θα δούμε αναλυτικά τη σύνδεση του ορισμού μιας έννοιας με την εικόνα της έννοιας, τον τρόπο χρήσης αυτών στα Μαθηματικά, καθώς και πως αυτός μπορεί να επηρεαστεί αρνητικά από τον αντίστοιχο τρόπο χρήσης στην καθημερινή ζωή.

Ο Vinner (1991) στην προσπάθεια του να περιγράψει τον τρόπο που συνδέονται ο ορισμός μιας έννοιας με την εικόνα της έννοιας, απομόνωσε τον ορισμό από τα υπόλοιπα συστατικά της εικόνας και θεώρησε την ύπαρξη δύο διαφορετικών «κελιών» στη γνωστική δομή που έχει διαμορφώσει ένα άτομο για την έννοια. Το ένα κελί αφορά στον *ορισμό της έννοιας* και το δεύτερο στην *εικόνα της έννοιας* (χωρίς να περιλαμβάνεται σε αυτό ο ορισμός). Ένα από τα κελιά ή ακόμα και τα δύο μπορεί να είναι κενά. Το κελί της εικόνας της έννοιας θεωρείται κενό, εφ' όσον δεν αποδίδεται νόημα στο όνομα της έννοιας. Αυτό μπορεί να συμβεί στις περιπτώσεις που απλά απομνημονεύεται ο ορισμός της έννοιας. Πολλοί θεωρούν ότι ότι η εικόνα έννοιας θα διαμορφωθεί με τη βοήθεια του ορισμού έννοιας και θα ελέγχεται πλήρως από αυτόν. Δηλαδή, θεωρούν ότι τα δύο κελιά συνδέονται με μια διαδικασία μονής κατεύθυνσης για το σχηματισμό έννοιας, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.

Ορισμός Έννοιας → Εικόνα Έννοιας

Σχήμα 1: Γνωστική ανάπτυξη μιας τυπικής έννοιας

Η διαμόρφωση των δύο κελιών όμως μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Μπορεί να διαμορφωθούν παράλληλα με αλληλεπίδραση μεταξύ των κελιών αλλά μπορούν να διαμορφωθούν και ανεξάρτητα.

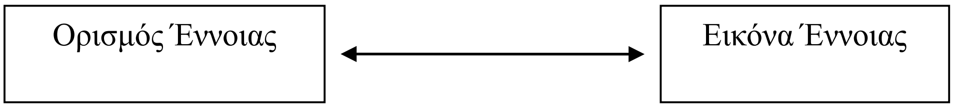
Για παράδειγμα, ένας μαθητής μπορεί να έχει σχηματίσει εικόνα για τα συστήματα συντεταγμένων, ως αποτέλεσμα της παρατήρησης και μελέτης πολλών γραφικών παραστάσεων. Σύμφωνα με αυτή την εικόνα, οι δύο άξονες ενός συστήματος συντεταγμένων είναι μεταξύ τους κάθετοι. Στην περίπτωση αυτή, ο μαθητής μπορεί να διαμορφώσει ως ορισμό του συστήματος συντεταγμένων ότι είναι δύο κάθετοι άξονες. Αργότερα μπορεί να μάθει στο μάθημα ότι ένα σύστημα συντεταγμένων αποτελείται από δύο τεμνόμενους (όχι υποχρεωτικά κάθετους) άξονες, οπότε το περιεχόμενο του κελιού που περιλαμβάνει τον ορισμό της έννοιας θα διαφοροποιηθεί. Στη συνέχεια τρία είναι τα δυνατά ενδεχόμενα που μπορεί να συμβούν:

i) Η εικόνα της έννοιας μπορεί να μεταβληθεί ώστε να συμπεριλάβει και τα συστήματα συντεταγμένων των οποίων οι άξονες δεν σχηματίζουν ορθή γωνία. Αυτό αποτελεί μια ικανοποιητική ανακατασκευή της εικόνας.

ii) Η εικόνα της έννοιας μπορεί να παραμείνει αμετάβλητη και το κελί του ορισμού για ένα μικρό διάστημα να περιέχει τον ορισμό που έμαθε ο μαθητής, αλλά σύντομα αυτός ο ορισμός να ξεχαστεί. Στην περίπτωση αυτή, όταν ο μαθητής θα κληθεί να ορίσει ένα σύστημα συντεταγμένων θα αναφερθεί πάλι σε σύστημα με κάθετους άξονες. Σε αυτήν την περίπτωση ο ορισμός όχι μόνο δεν επηρέασε την εικόνα αλλά γρήγορα ξεχάστηκε.

iii) Και τα δύο κελιά να παραμείνουν αμετάβλητα. Όταν ζητηθεί από τον μαθητή να ορίσει τι είναι σύστημα συντεταγμένων θα επαναλάβει τον ορισμό που έμαθε στο μάθημα, αλλά σε όλες τις άλλες καταστάσεις θα σκεφτεί το σύστημα συντεταγμένων ως δύο κάθετους άξονες.

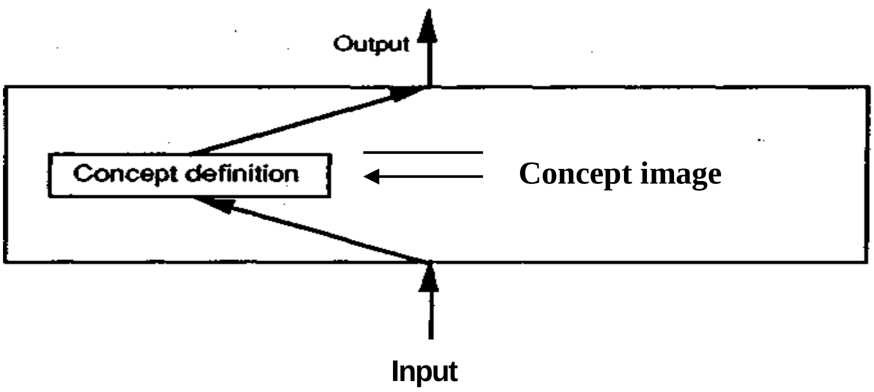
Μια παρόμοια διαδικασία ενδέχεται να εμφανιστεί όταν μια έννοια εισάγεται αρχικά μέσω ενός ορισμού. Εδώ, το κελί της εικόνας της έννοιας είναι κενό αρχικά. Μετά από πολλά παραδείγματα και επεξηγήσεις γεμίζει βαθμιαία.



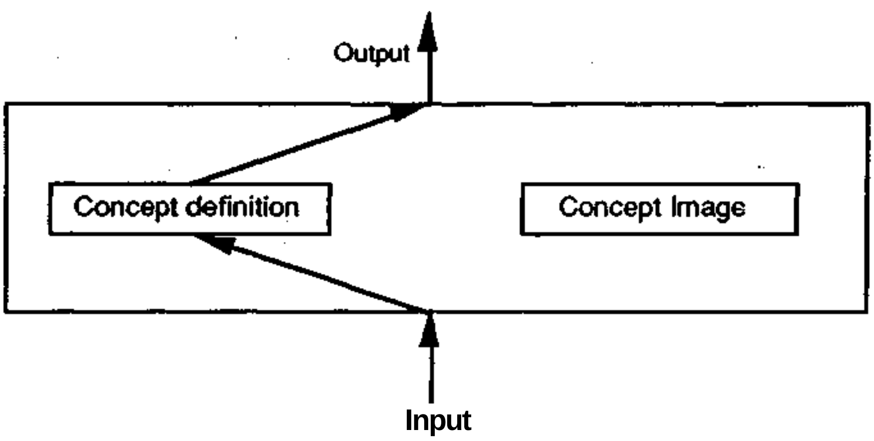
Σχήμα 2: Αλληλεπίδραση μεταξύ εικόνας έννοιας & ορισμού έννοιας

Το σχήμα 2 αναφέρεται στις μακροχρόνιες διαδικασίες του σχηματισμού μιας έννοιας μέσω της αλληλεπίδρασης μεταξύ των περιεχομένων των δύο κελιών.

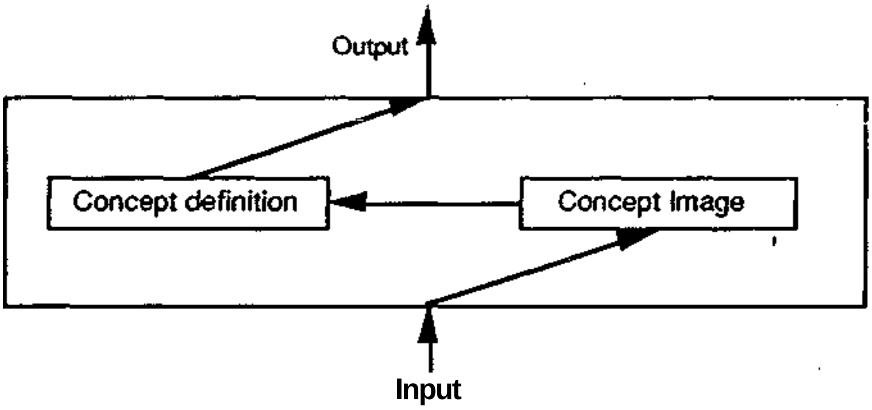
Εκτός από τη διαδικασία του σχηματισμού μιας έννοιας τα δύο κελιά μπορεί να ενεργοποιηθούν και κατά τη διαδικασία της επίλυσης προβλήματος. Όταν τίθεται ένα πρόβλημα σε έναν μαθητή, τα κελιά της εικόνας έννοιας και του ορισμού έννοιας υποτίθεται ότι πρόκειται να ενεργοποιηθούν. Οι μαθηματικά σωστές διανοητικές διαδικασίες που ενεργοποιούνται για την επίλυση του προβλήματος θα πρέπει σχηματικά να εκφράζονται με ένα από τα τρία παρακάτω σχήματα. (Τα σχήματα αντιπροσωπεύουν μόνο την πτυχή της εικόνας έννοιας και του ορισμού έννοιας που εμπλέκονται στη διαδικασία της επίλυσης του προβλήματος και τα βέλη στα σχήματα αντιπροσωπεύουν τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους ένα γνωστικό σύστημα ενδέχεται να λειτουργήσει.)



Σχήμα 3: Αλληλεπίδραση μεταξύ του ορισμού και της εικόνας

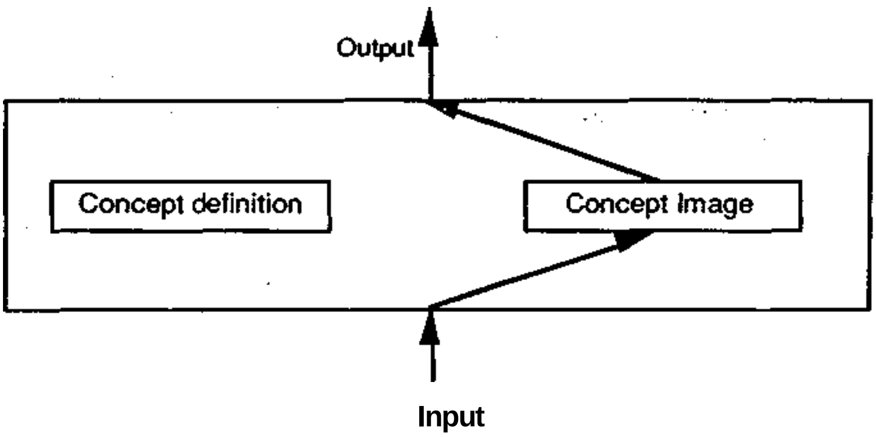


Σχήμα 4: Καθαρά τυπική αφαίρεση



Σχήμα 5: Αφαίρεση μετά από τη διαισθητική σκέψη

Το κοινό χαρακτηριστικό γνώρισμα όλων των παραπάνω σχημάτων είναι ότι για την επίλυση ενός προβλήματος οι διανοητικές διαδικασίες που συντελούνται περιλαμβάνουν οπωσδήποτε και τον ορισμό της έννοιας και η τελική απάντηση προκύπτει από την χρήση αυτού. Αυτό είναι και η μαθηματικά σωστή διαδικασία. Όπως όμως έχει προκύψει από αρκετές έρευνες, στη πράξη με τους μαθητές δε συμβαίνει πάντοτε αυτό. Ερευνητικά αποτελέσματα, όπως θα αναφέρουμε παρακάτω, δείχνουν ότι ένα πιο κατάλληλο πρότυπο για τις διαδικασίες που ακολουθούν στη πράξη οι περισσότεροι μαθητές είναι το ακόλουθο:

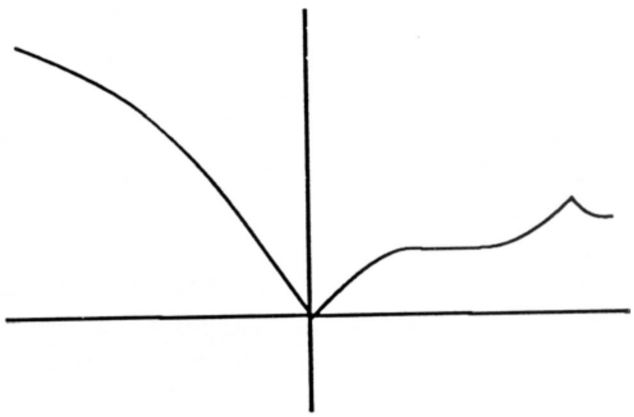


Σχήμα 6 **:** Διαισθητική απάντηση

Εδώ το κελί του ορισμού έννοιας, αν και μπορεί να μην είναι κενό, δεν ενεργοποιείται κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος. Στην περίπτωση αυτή κυριαρχεί ο τρόπος σκέψης που έχει συνηθίσει ο μαθητής στο πλαίσιο της καθημερινής ζωής και έτσι αγνοεί την ανάγκη να συμβουλευτεί τον τυπικό ορισμό. Όταν η αναφορά μόνο στο κελί της εικόνας της έννοιας οδηγεί τον μαθητή σε σωστές απαντήσεις δεν του δημιουργείται η ανάγκη να αλλάξει τον τρόπο σκέψης που έχει συνηθίσει στην καθημερινή ζωή και να χρησιμοποιεί τον τυπικό ορισμό της έννοιας. Μόνο τα μη στερεότυπα προβλήματα, στα οποία οι ελλιπείς εικόνες έννοιας μπορεί να είναι παραπλανητικές, μπορούν να ενθαρρύνουν τους μαθητές να στραφούν και στον ορισμό της έννοιας.

Στη συνέχεια, για να υποστηρίξουμε τον ισχυρισμό ότι η πλειοψηφία των μαθητών δεν χρησιμοποιεί τους τυπικούς ορισμούς κατά την διαδικασία επίλυσης προβλήματος θα παρουσιάσουμε τα ερευνητικά δεδομένα μιας έρευνας που αφορά στην έννοια της συνάρτησης (Vinner, 1991). Το δείγμα της έρευνας ήταν 147 πρωτοετείς φοιτητές ενός πανεπιστημίου στην Αγγλία οι οποίοι είχαν τα Μαθηματικά βασικό μάθημα στις τελευταίες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στους φοιτητές αυτούς δόθηκε το παρακάτω ερωτηματολόγιο.

1. Υπάρχει συνάρτηση στην οποία κάθε αριθμός διάφορος του μηδενός αντιστοιχίζεται στο τετράγωνό του και το 0 αντιστοιχίζεται στο -1;
2. Υπάρχει συνάρτηση στην οποία κάθε θετικός αριθμός αντιστοιχίζεται στο 1, κάθε αρνητικός αντιστοιχίζεται στο -1 και το 0 στο 0;
3. Υπάρχει συνάρτηση η γραφική παράσταση της οποίας να είναι η ακόλουθη;



Σχήμα 7: Προκύπτει αυτή η γραφική παράσταση από μια συνάρτηση;

4. Κατά την άποψή σας τι είναι συνάρτηση;

Στις πρώτες τρεις ερωτήσεις οι φοιτητές έπρεπε να επιλέξουν μεταξύ «ναι» ή «όχι» και να εξηγήσουν τις απαντήσεις τους. Ο ορισμός της έννοιας της συνάρτησης που είχε διδαχθεί σε όλους τους φοιτητές ήταν ότι, συνάρτηση είναι μια αντιστοιχία μεταξύ δύο συνόλων που σε κάθε στοιχείο του πρώτου συνόλου αντιστοιχεί ακριβώς ένα στοιχείο του δεύτερου. Παρά ταύτα, μόνο το 57% των φοιτητών έδωσε αυτόν ή κάτι ισοδύναμο με αυτόν τον ορισμό ως απάντηση στην ερώτηση 4. Το 14% των φοιτητών είπε ότι μια συνάρτηση είναι ένας *κανόνας* αντιστοίχισης και απέρριψαν τη δυνατότητα μιας αντιστοιχίας η οποία δεν βασίζεται σε κάποιο κανόνα. Ένα επιπλέον 14% υποστήριξε ότι μια συνάρτηση είναι ένας τύπος ή μια εξίσωση. Το υπόλοιπο ποσοστό δεν έδωσε ικανοποιητική απάντηση ή δεν απάντησε. Σε ότι αφορά στις εικόνες έννοιας προέκυψε ότι σε συγκεκριμένες καταστάσεις (στις ερωτήσεις 1 και 2) μεταξύ του ενός τρίτου και των δύο τρίτων των φοιτητών θεωρούσαν ότι μια συνάρτηση θα πρέπει να δίνεται από έναν ενιαίο τύπο ή, εάν δίνονται δύο τύποι, τότε θα πρέπει τα επιμέρους πεδία ορισμού για τον κάθε τύπο να είναι διαστήματα. Ένας κανόνας για ένα μόνο σημείο (όπως στην ερώτηση 1) δεν δίνει συνάρτηση. Μερικοί φοιτητές θεώρησαν ότι οι αντιστοιχίες οι οποίες δεν δίνονται από έναν αλγεβρικό τύπο δεν είναι συναρτήσεις, εκτός αν η μαθηματική κοινότητα τις έχει θεωρήσει ως συναρτήσεις με το να τους δώσει ένα όνομα ή μια ειδική αναφορά. (Αυτό φάνηκε στις απαντήσεις της ερώτησης 2). Άλλοι φοιτητές (περίπου τα 2/5) πίστευαν πως η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης πρέπει να είναι κανονική, να αυξάνει μέσα σε λογικά πλαίσια κ.α. (Αυτό φάνηκε στις απαντήσεις της ερώτησης 3.) Έτσι, πολλοί φοιτητές που όρισαν τη «συνάρτηση» σωστά δεν χρησιμοποιούσαν τον ορισμό της όταν απαντούσαν τις ερωτήσεις 1-3. Μόνο το ένα τρίτο των φοιτητών που έδωσαν το σωστό ορισμό της συνάρτησης απάντησε επίσης σωστά στις ερωτήσεις 1-3. Κανένας φοιτητής από αυτούς που έδωσαν λανθασμένο ορισμό δεν απάντησε στις ερωτήσεις 1-3 σωστά.

Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΟΠΤΙΚΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΔΟΜΗΣΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ

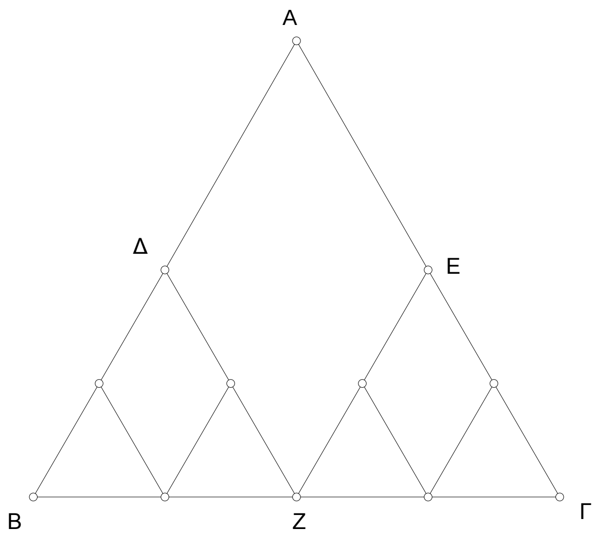
Σύμφωνα με τον D.Tall (2004) μπορούμε να διακρίνουμε τρεις κόσμους που αφορούν στον τρόπο προσέγγισης των Μαθηματικών. Δηλαδή, τρεις κόσμους μαθηματικής σκέψης. Τον ενσώματο (embodied), τον διαδικασιοεννοιολογικό (proceptual) και τον αξιωματικό (axiomatic) κόσμο. Ο ενσώματος κόσμος βασίζεται στις αισθήσεις μας και στη δράση και αποτελεί τον αρχικό τρόπο μαθηματικής σκέψης. Στο πλαίσιο αυτού του κόσμου αρχίζει ο μαθητής να μαθαίνει και να σκέπτεται Μαθηματικά. Ο διαδικασιοεννοιολογικός κόσμος είναι ο κόσμος των συμβόλων και των διαδικασιών. Στο πλαίσιο αυτού του κόσμου ο μαθητής κατανοεί τις έννοιες μέσα από τις διαδικασίες που εκτελεί με την χρήση των μαθηματικών συμβόλων και αυτό αποτελεί το δεύτερο στάδιο της εξέλιξης της μαθηματικής σκέψης του μαθητή. Ο αξιωματικός κόσμος είναι το τρίτο στάδιο. Είναι ο κόσμος στον οποίο τα Μαθηματικά αποτελούν ένα πλήρες οικοδόμημα που έχει ως βάση ορισμένα αξιώματα. Με τη χρήση αυτών, ορίζονται νέες έννοιες και αποδεικνύονται οι πρώτες μαθηματικές προτάσεις. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τα αξιώματα και τις αποδειχθείσες προτάσεις αποδεικνύονται νέες προτάσεις κ.ο.κ. Έτσι οικοδομείται ο αξιωματικός κόσμος, που αποτελεί και το ανώτερο στάδιο της μαθηματικής σκέψης. Οι δύο πρώτοι κόσμοι, ο ενσώματος και ο διαδικασιοεννοιολογικός, είναι οι κόσμοι που κυριαρχούν στην πρωτοβάθμια και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αντίστοιχα. Το πέρασμα από τον ενσώματο στον διαδικασιοεννοιολογικό γίνεται σταδιακά. Οι δύο κόσμοι συνυπάρχουν μέχρις ότου να φτάσει ο μαθητής να κατακτήσει τον διαδικασιοεννοιολογικό τρόπο σκέψης σε τέτοιο βαθμό, ώστε να θεωρείται ότι δεν του χρειάζεται ο προηγούμενος. Έτσι ο ενσώματος τρόπος σκέψης παύει να χρησιμοποιείται, σταδιακά εξασθενεί και ουσιαστικά εξαφανίζεται. Ο αξιωματικός τρόπος σκέψης αρχίζει να διαμορφώνεται στο Λύκειο και ολοκληρώνεται στο Πανεπιστήμιο.

Ο ενσώματος τρόπος σκέψης, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, βασίζεται στις αισθήσεις και στη δράση. Ο μαθητής σκέφτεται Μαθηματικά, ενεργώντας σε κάτι που μπορεί να αντιληφθεί με τις αισθήσεις του. Ο ενσώματος τρόπος σκέψης στη σχολική εκπαίδευση χρησιμοποιείται κυρίως για την εισαγωγή μαθηματικών εννοιών στο δημοτικό σχολείο. Στο γυμνάσιο χρησιμοποιείται ελάχιστα, κυρίως μέσα από τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, χωρίς να παίζει σημαντικό ρόλο. Ελάχιστες φορές ζητείται από τον μαθητή να λύσει προβλήματα στηριζόμενος σε γραφικές παραστάσεις και ακόμη λιγότερες να συνδυάσει τον διαδικασιοεννοιολογικό τρόπο σκέψης που κυρίως χρησιμοποιεί με τον ενσώματο, δουλεύοντας πάνω στο ίδιο θέμα. Η αντίληψη που κυριαρχεί είναι ότι ο μαθητής πρέπει να μάθει να σκέφτεται χρησιμοποιώντας μόνο τις συμβολικές αναπαραστάσεις, δηλαδή μόνο τα τυπικά μαθηματικά. Έτσι, όπως προαναφέρθηκε, σταδιακά εξασθενεί στους μαθητές η δυνατότητα σκέψης στο πλαίσιο του ενσώματου κόσμου και πρακτικά εξαφανίζεται.

Ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών του λυκείου δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει αυτό τον τρόπο σκέψης. Έχει περάσει πλήρως στον διαδικασιοεννοιολογικό τρόπο σκέψης και δεν έχει την ικανότητα να τον συνδέει με τον ενσώματο.

Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΚΑΙ ΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΤΩΝ ΟΠΤΙΚΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Έρευνες δείχνουν ότι για να αναπτυχθεί ουσιαστικά η μαθηματική σκέψη του μαθητή και να περάσει σε ένα ανώτερο επίπεδο, πρέπει αυτός να μπορεί να συνδυάζει τον ενσώματο και τον διαδικασιοεννοιολογικό τρόπο σκέψης (Christou, Pitta-Pantazi, Souyoul, and Zachariades, 2005). Οι οπτικές αναπαραστάσεις, αποτελούν σημαντικά εργαλεία στο πλαίσιο αυτού του κόσμου. Υπάρχει σημαντική βιβλιογραφία που αφορά στη σημασία αυτών των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των Μαθηματικών και γενικότερα στη μαθηματική σκέψη, καθώς και στα προβλήματα που συνδέονται με αυτές (π.χ. Arkavi, 2003). Ο μαθητής πρέπει να είναι σε θέση να μελετά τις εικόνες και να καταλαβαίνει τι "λένε". Πρέπει να μπορεί να μετατρέπει τις συμβολικές σχέσεις σε εικόνες και να μεταφράζει τις εικόνες σε συμβολικά Μαθηματικά. Η μετάβαση από τα σύμβολα στις εικόνες, δηλαδή η ενσάρκωση του αφηρημένου με κάποιο συγκεκριμένο αντικείμενο, του δίνει τη δυνατότητα να κατανοήσει καλύτερα το αφηρημένο και να σκεφτεί πάνω σε κάτι που βλέπει. Η δυνατότητα μετάφρασης από τις εικόνες στα σύμβολα είναι απαραίτητη γιατί μόνον έτσι, δηλαδή μέσα από την αυστηρά τυπική απόδειξη, κατοχυρώνεται και γίνεται αποδεκτή μια μαθηματική αλήθεια. Συμπεράσματα που στηρίζονται αποκλειστικά στην εικόνα μπορεί να είναι εσφαλμένα. Ένα απλό αλλά χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου σφάλματος είναι το επόμενο:
Κατασκευάζουμε μια ακολουθία ($α_n$) με την ακόλουθη διαδικασία. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τα μέσα των πλευρών του και κατασκευάζουμε τα τρίγωνα ΒΔΖ και ΔΕΓ. Θέτουμε $α_1$ το άθροισμα των μηκών των ευθυγράμμων τμημάτων ΒΔ, ΔΖ, ΖΕ και ΕΓ, δηλαδή $α_1$= ΒΔ+ΔΖ+ΖΕ+ΕΓ. Στα τρίγωνα ΒΔΖ και ΖΕΓ κατασκευάζουμε από δύο τρίγωνα στο κάθε ένα με την ίδια διαδικασία και θέτουμε $α_2$ το άθροισμα των αντίστοιχων οκτώ ευθυγράμμων τμημάτων (Σχήμα 8). Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία κατασκευάζουμε μια ακολουθία $α_n$: n=1,2,....Η ερώτηση είναι που τείνει η ακολουθία $α_n$. Η εικόνα μπορεί να μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι η ακολουθία ($α_n$) συγκλίνει στο μήκος του ΒΓ. Εύκολα όμως αποδεικνύεται ότι $α_n$ = ΑΒ+ΑΓ για κάθε n=1,2,...., δηλαδή ότι η ακολουθία είναι σταθερή. Άρα συγκλίνει στη σταθερή τιμή της που προφανώς δεν είναι ίση με αυτή που καταλήξαμε εποπτικά.



Σχήμα 8

ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΟΠΤΙΚΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

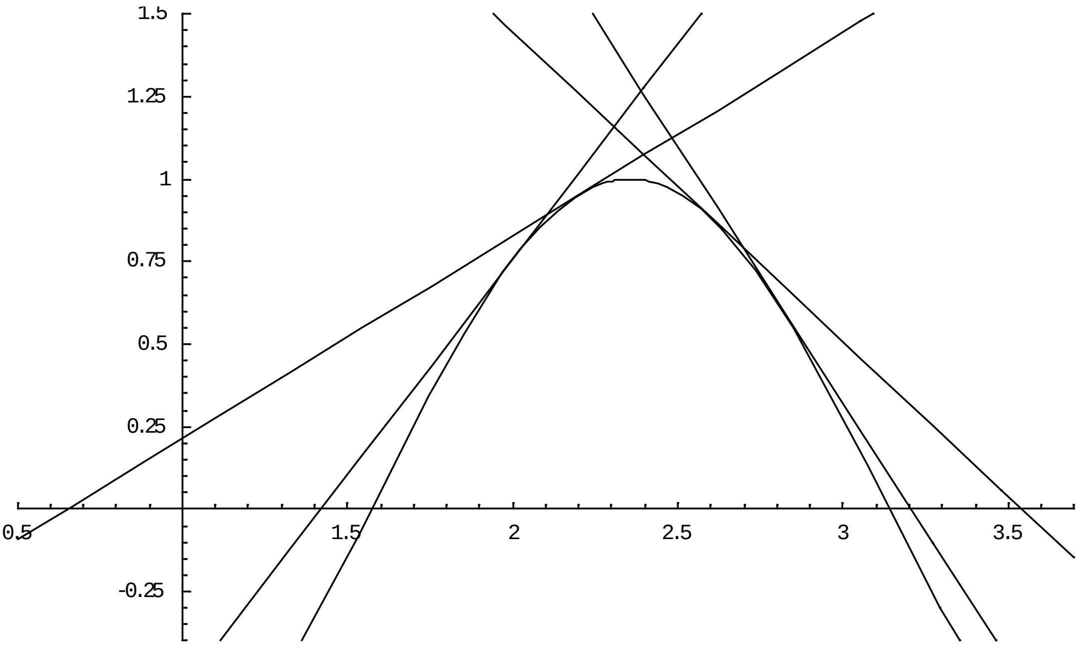
Πως μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι οπτικές αναπαραστάσεις στη διδασκαλία των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ώστε συντελέσουν στη βελτίωση της μαθηματικής σκέψης του μαθητή; Θα αναφέρουμε τέσσερις γενικές περιπτώσεις χρήσης των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Ι. Χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών.

Οι μαθηματικές έννοιες, αν εξαιρέσουμε τις γεωμετρικές, είναι έννοιες αφηρημένες. Οι ορισμοί τους δίνονται με μαθηματικά σύμβολα και η κατανόηση τους από τον μαθητή είναι πολλές φορές ελλιπής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την αδυναμία ή τη λανθασμένη χρήση τους στη λύση ασκήσεων. Η δυνατότητα οπτικοποίησης αυτών των ορισμών, δηλαδή η δυνατότητα αναπαράστασης τους με τρόπο ώστε να γίνουν αντιληπτοί μέσω των αισθήσεων, μπορεί να βοηθήσει το μαθητή να τους κατανοήσει καλύτερα και να τους χρησιμοποιεί σωστά. Ένα παράδειγμα έννοιας που δημιουργεί προβλήματα στους μαθητές και εισάγεται στις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου, είναι η έννοια της απόλυτης τιμής. Ο τυπικός ορισμός μαθαίνεται από πολλούς μαθητές με έναν μάλλον μηχανιστικό τρόπο και αυτό πολλές φορές τους οδηγεί σε λάθη. Επίσης δεν τους βοηθάει να κατανοήσουν πιο δύσκολες έννοιες που θα συναντήσουν αργότερα και που η απόλυτη τιμή παίζει καθοριστικό ρόλο στον ορισμό τους, όπως είναι η έννοια του ορίου. Αν ο μαθητής έχει κατανοήσει την αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών σε έναν άξονα και αντιληφθεί την απόλυτη τιμή ενός αριθμού ως την απόσταση του από το μηδέν, καθώς και την απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο αριθμών ως την απόσταση τους πάνω στον άξονα, θα έχει τη δυνατότητα να βλέπει θέματα που συνδέονται με την απόλυτη τιμή και από μια γεωμετρική οπτική. Αυτή η οπτική θα του φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη σε πολλές περιπτώσεις.

ΙΙ. Χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων για τη δημιουργία εικασιών.

Ο ρόλος των εικασιών στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης είναι πολύ σημαντικός. Για να αποδείξουμε μια μαθηματική πρόταση πρέπει πρώτα να προκύψει αυτή ως εικασία. Δηλαδή, μετά από κατάλληλες σκέψεις να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι μάλλον ισχύει η συγκεκριμένη πρόταση. Στη διδασκαλία των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση δεν δίνεται το απαιτούμενο βάρος στη δημιουργία εικασιών. Δεν αναδεικνύεται ο προβληματισμός μέσα από τον οποίο προέκυψε η διατύπωση των προτάσεων και των θεωρημάτων. Με ποιο τρόπο όμως μπορεί να αναπτυχθεί μέσα στη τάξη ένας προβληματισμός που θα οδηγήσει στη διατύπωση της εικασίας; Σε αυτό σημαντικό ρόλο μπορούν να διαδραματίσουν οι οπτικές αναπαραστάσεις. Ιδιαίτερα σήμερα, με τη χρήση της ψηφιακής τεχνολογίας, αυτό μπορεί να γίνει με πολύ καλύτερους όρους σε σχέση με το παρελθόν. Αναφέρουμε ως παράδειγμα ένα σημαντικό θεώρημα της Μαθηματικής Ανάλυσης που συμπεριλαμβάνεται στην ύλη του Λυκείου. Είναι το θεώρημα που συνδέει τη μονοτονία μιας διαφορίσιμης συνάρτησης με το πρόσημο της πρώτης παραγώγου της. Αυτό το θεώρημα συνήθως διατυπώνεται χωρίς απόδειξη και χρησιμοποιείται για τη μελέτη συναρτήσεων. Πως, όμως, σκεφτήκαμε να συνδέσουμε τη μονοτονία μιας διαφορίσιμης συνάρτησης με το πρόσημο της παραγώγου της και οδηγηθήκαμε στη διατύπωση του συγκεκριμένου θεωρήματος; Αυτό το βήμα είναι ένα πολύ σημαντικό βήμα για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης του μαθητή και είναι ένα βήμα που μπορεί να γίνει στο πλαίσιο της διδασκαλίας του Απειροστικού Λογισμού στο Λύκειο. Η μελέτη της κίνησης της εφαπτομένης πάνω στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης (σχήμα 2) μπορεί να οδηγήσει στην παρατήρηση ότι στα διαστήματα που η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα (αντ. γνησίως φθίνουσα) η εφαπτομένη σχηματίζει οξεία (αντ. αμβλεία) γωνία με τον άξονα xx΄, δηλαδή η παράγωγος στα διαστήματα αυτά είναι θετική (αντ. αρνητική). Αυτή η μελέτη μπορεί να γίνει πολύ καλύτερα με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή, όπου ο μαθητής μπορεί να βλέπει την κίνηση της εφαπτομένης.



Σχήμα 9

Η παραπάνω παρατήρηση μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές στη σύνδεση της μονοτονίας της συνάρτησης με το πρόσημο της παραγώγου και στη διαμόρφωση της εικασίας ότι αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα (αντ. γνησίως φθίνουσα) σε ένα διάστημα τότε η παράγωγος της είναι θετική (αντ. Αρνητική) σε αυτό το διάστημα. Η εικασία αυτή επιβεβαιώνεται εύκολα και στη συνέχεια είναι λογικό να τεθεί η ερώτηση αν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή, αν η παράγωγος μιας διαφορίσιμης συνάρτησης είναι θετική (αντ. αρνητική) σε ένα διάστημα τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα (αντ. γνησίως φθίνουσα) σε αυτό το διάστημα;

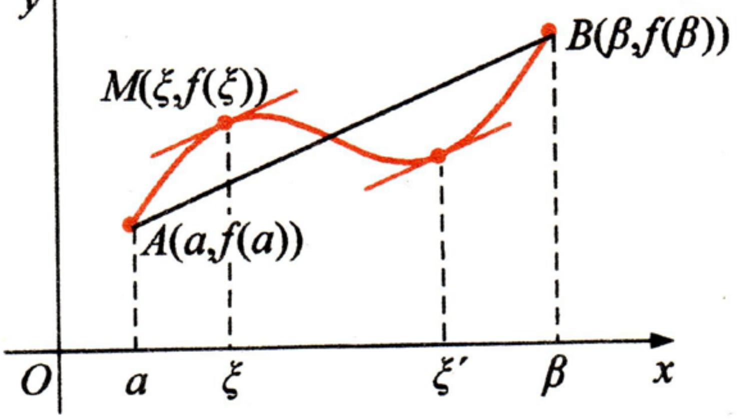
Η μελέτη και η προσεκτική παρατήρηση ειδικών περιπτώσεων στη μαθηματική έρευνα πολλές φορές οδήγησε στη διατύπωση σημαντικών γενικών εικασιών που εν συνεχεία αποδείχθηκαν. Η μελέτη που περιγράψαμε παραπάνω είναι τέτοιας μορφής. Η εφαρμογή τέτοιων διαδικασιών στη διδασκαλία των Μαθηματικών, όχι μόνο στο Λύκειο αλλά και σε μικρότερες τάξεις, αναπτύσσει τη μαθηματική σκέψη του μαθητή. Για να είναι όμως αποτελεσματικές διαδικασίες αυτού του τύπου, πρέπει ο μαθητής να έχει τη δυνατότητα να σκέφτεται πάνω στα σχήματα και να μπορεί να μεταφράζει τα συμπεράσματα σε τυπικά μαθηματικά.

ΙΙΙ. Χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων για την περιγραφή Μαθηματικών συμπερασμάτων

Μια μαθηματική πρόταση διατυπώνεται σε καθαρά συμβολική μορφή. Η διατύπωση αυτή πολλές φορές φαίνεται δυσνόητη και ξένη στο μαθητή. Η περιγραφή της με μια οπτική αναπαράσταση, μπορεί να βοηθήσει την καλύτερη κατανόηση της. Ένα κλασσικό παράδειγμα είναι το επόμενο θεώρημα, γνωστό ως θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού:

“ Για κάθε συνάρτηση f:$[a, \beta] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και διαφορίσιμη στο (a, β) υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}$. ”

Η γεωμετρική αναπαράσταση του θεωρήματος (σχήμα 3) βοηθάει τον μαθητή να καταλάβει τι ουσιαστικά “λέει” το θεώρημα. Δηλαδή, κάθε συνάρτηση με τις παραπάνω ιδιότητες έχει τουλάχιστον ένα σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(\beta, f(\beta))$.



Σχήμα 10

IV. Χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων για την περιγραφή διαδικασιών και αποδείξεων

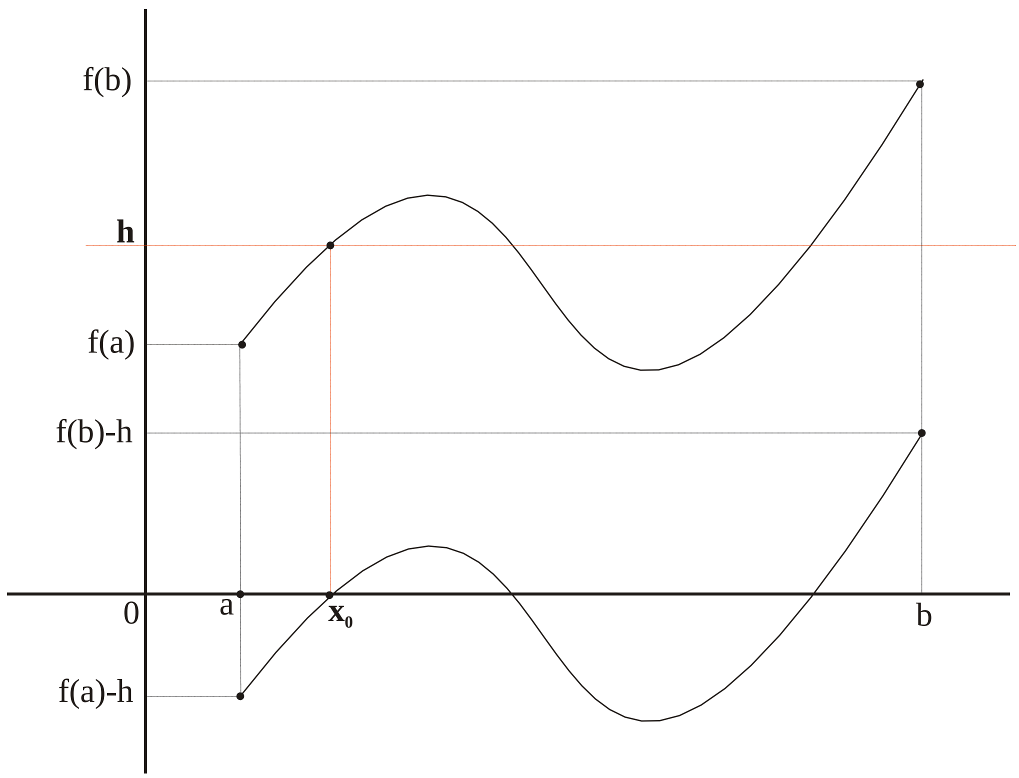
Πολλές φορές διαδικασίες ή αποδείξεις φαίνονται στους μαθητές δύσκολες και δεν μπορούν να τις κατανοήσουν. Αλλά και διαδικασίες ή αποδείξεις που οι μαθητές τις θεωρούν εύκολες, πολλές φορές αυτό που μπορούν να επιτύχουν είναι απλά να τις εφαρμόσουν ή να τις γράψουν όταν τους ζητηθεί. Δεν έχουν όμως κατανοήσει την ουσία τους. Δεν έχουν καταλάβει την ιδέα ή τις ιδέες που κρύβονται πίσω από τη τυπική περιγραφή τους. Η δυνατότητα περιγραφής τέτοιων διαδικασιών ή αποδείξεων με οικίες στους μαθητές αναπαραστάσεις μπορούν να βοηθήσουν ουσιαστικά στη κατανόηση τους. Ένα παράδειγμα μια τέτοιας απόδειξης είναι η απόδειξη του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών:

“ Αν $f:[a, b] \to R$ συνεχής συνάρτηση και $f(a) < h < f(b)$ ή $f(a) < h < f(b)$ τότε υπάρχει $x_0 \in (α, b)$ ώστε $f(x_0)=h$.”

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού, η οποία υπάρχει στα σχολικά βιβλία, προκύπτει εύκολα από την ειδική περίπτωση για $h=0$, η οποία είναι γνωστή ως θεώρημα του Bolzano και υπάρχει στα σχολικά βιβλία χωρίς απόδειξη.

Πράγματι, αν θέσουμε $g:[a, b] \to R$, με $g(x)=f(x)-h$ για κάθε $x \in [a, b]$, είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση g ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano. Συνεπώς υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $g(x_0)=0$. Άρα $f(x_0)=h$.

Η παραπάνω απόδειξη είναι μια απλή απόδειξη που δεν δημιουργεί πρόβλημα στους μαθητές. Πόσοι όμως από αυτούς κατανοούν την ουσία της; Πόσοι κατανοούν ότι κάνουμε μια μεταφορά της συνάρτησης g, ώστε να ικανοποιηθούν οι προϋποθέσεις για να εφαρμοστεί το θεώρημα του Bolzano; Η περιγραφή της παραπάνω απόδειξης με το σχήμα 4 ή, πολύ καλύτερα, με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή όπου θα φαίνεται η κίνηση, οπτικοποιεί αυτή τη διαδικασία και αναδεικνύει την ιδέα κλειδί που χρησιμοποιείται στην απόδειξη.



Σχήμα 11

Οι αναπαραστάσεις που αναφέραμε παραπάνω είναι όλες γεωμετρικές αναπαραστάσεις. Δηλαδή έχουν ένα άμεσα μαθηματικό περιεχόμενο. Η οπτικοποίηση όμως μιας μαθηματικής ιδέας δεν γίνεται μόνο μέσα από τέτοιου τύπου αναπαραστάσεις. Υπάρχουν και αναπαραστάσεις που δεν έχουν άμεση σχέση με τα Μαθηματικά, αλλά μπορούν να βοηθήσουν στη κατανόηση μαθηματικών ιδεών. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το επόμενο. Τοποθετούμε στη σειρά και σε όρθια θέση τα πλακίδια του γνωστού παιχνιδιού "ντόμινο" ώστε η απόσταση κάθε ενός από το επόμενο του να είναι μικρότερη του ύψους τους. Αν ρίξουμε το πρώτο πλακίδιο τότε θα πέσουν όλα. Γιατί συμβαίνει αυτό; Γιατί πέφτει το πρώτο και ισχύει ότι αν πέσει κάποιο θα πέσει και το επόμενο του. Αυτή είναι η αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής την οποία πολλές φορές εφαρμόζουμε για να αποδείξουμε ότι μια σχέση ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς.

Πολλές φορές επίσης δίνουμε σε μαθηματικές ιδιότητες μια ονομασία που προκαλεί μια, μη μαθηματική, νοερή εικόνα η οποία αναπαριστά αυτή την ιδιότητα. Για παράδειγμα, η πρόταση:

"Έστω $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ τρεις ακολουθίες με $\alpha_n \le \beta_n \le \gamma_n$ για κάθε n=1,2,..... Αν $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \alpha$ τότε και $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \alpha$."

πολλές φορές αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως «ιδιότητα σάντουιτς» ή «αρχή των αστυνομικών». Οι ονομασίες αυτές προκαλούν νοερές εικόνες που αναπαριστούν την παραπάνω ιδιότητα. Ας φανταστούμε π.χ. δύο αστυνομικούς οι οποίοι έχουν συλλάβει ένα κρατούμενο και τον κρατάνε από τη μια μεριά ο ένας και από την άλλη ο άλλος. Τότε όπου πάνε οι αστυνομικοί εκεί αναγκαστικά θα πάει και ο κρατούμενος. Αυτή η, μη μαθηματική, νοερή εικόνα αναπαριστά την παραπάνω μαθηματική ιδιότητα. Αντίστοιχη νοερή εικόνα προκαλεί και η άλλη ονομασία.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η χρήση κατάλληλων οπτικών αναπαραστάσεων μπορεί να βοηθήσει ουσιαστικά τους μαθητές να κατανοήσουν μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, να προβληματιστούν, να σκεφτούν και να οδηγηθούν σε εικασίες, να καταλάβουν ιδέες που υπάρχουν μέσα σε τυπικές αποδείξεις Για να μπορέσει όμως ο μαθητής να κάνει ουσιαστική χρήση αυτών των αναπαραστάσεων πρέπει η διδασκαλία των Μαθηματικών στο σχολείο να είναι τέτοια ώστε να συνδυάζει τα τυπικά μαθηματικά με οπτικές αναπαραστάσεις τους. Να εξασκήσει το μαθητή να χρησιμοποιεί και τις δύο μορφές αναπαράστασης, να γνωρίζει τα όρια τους και να μπορεί να μεταβαίνει από τη μια στην άλλη. Να είναι σε θέση να χρησιμοποιεί κάθε φορά αυτή που είναι πιο πρόσφορη για να λύσει το πρόβλημα που αντιμετωπίζει, γνωρίζοντας όμως ότι η μαθηματική αλήθεια κατοχυρώνεται μόνο μέσα από την τυπική απόδειξη. Τα παραπάνω θα συνεισφέρουν ουσιαστικά στο να οικοδομήσει ο μαθητής μια πραγματικά μαθηματική σκέψη.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η διδασκαλία των Μαθηματικών είναι πολύ δύσκολη υπόθεση. Για πολλά μαθηματικά θέματα από αυτά που διδάσκουμε σήμερα απαιτήθηκαν εκατοντάδες χρόνια για να αποκτήσουν τη τελική τους μορφή. Στη διάρκεια αυτών των αιώνων και στη πορεία εξέλιξης τους έγιναν λάθη και δημιουργήθηκαν εσφαλμένες αντιλήψεις οι οποίες στη συνέχεια αναθεωρήθηκαν μέχρι να διαμορφωθούν στη μορφή που εμείς γνωρίζουμε σήμερα. Αυτή η πορεία αποδεικνύει ότι δεν είναι καθόλου εύκολη η σύλληψη αυτών των θεμάτων από το μαθητή. Πολλά από τα λάθη που έγιναν σε αυτή τη πορεία είναι φυσικό να αποτελούν και λάθη πολλών μαθητών.

Μια διδασκαλία των μαθηματικών που περιγράφεται από το σχήμα «Ορισμός – Θεώρημα – Απόδειξη - Εφαρμογή» έχει μοναδικό στόχο την τυπική παρουσίαση των αποτελεσμάτων και υποβαθμίζει ή αγνοεί πλήρως τις διαδρομές της σκέψης που οδήγησαν σε αυτό το αποτέλεσμα. Είναι μια στεγνή και τυπική περιγραφή, η οποία δεν προκαλεί το ενδιαφέρον και την περιέργεια των μαθητών. Έχει καθαρά χαρακτήρα διεκπεραίωσης και ο μαθητής απλώς παρακολουθεί χωρίς να συμμετέχει και συνήθως χωρίς να καταλαβαίνει. Η παραπάνω διδακτική διαδικασία είναι αυτή που συνήθως ακολουθείται σήμερα. Ο καθηγητής έχει μια ορισμένη ύλη που πρέπει να καλύψει μέσα σε συγκεκριμένο χρόνο. Οργανώνει αυτή την ύλη σε ενότητες, όπου κάθε ενότητα περιέχει ορισμούς, θεωρήματα, αποδείξεις και εφαρμογές τα οποία μπαίνουν στη σειρά ώστε να υπάρχει μια λογική δομή και τα μοιράζει όλα αυτά μέσα στις διδακτικές ώρες του. Με τον τρόπο αυτό το κομμάτι των Μαθηματικών που διδάσκεται παρουσιάζεται ως ένα ολοκληρωμένο και τελειωμένο προϊόν. Είναι αλήθεια ότι αυτός ο τρόπος διδασκαλίας έχει αρκετά πλεονεκτήματα. Επιτρέπει πολύ καλό σχεδιασμό κάθε ώρας διδασκαλίας, προβλέψιμη πρόοδο της ύλης και εγγυάται ότι η ύλη ή το μεγαλύτερο μέρος της θα καλυφθεί. Έχει όμως και ένα σημαντικό μειονέκτημα που δεν μπορεί να αγνοηθεί. Εστιάζει κυρίως στο αποτέλεσμα της μαθηματικής σκέψης και όχι στη διαδικασία του μαθηματικού τρόπου σκέψης. Δεν αναδεικνύει την πορεία και τις μαθηματικές ιδέες που οδήγησαν στο αποτέλεσμα.

Αν παρατηρήσει κάποιος προσεκτικά το πως αρκετοί μαθητές με υψηλό βαθμό στα Μαθηματικά επεξεργάζονται μαθηματικά προβλήματα, μπορεί να διαπιστώσει ότι έχουν σοβαρές παρανοήσεις σε βασικές μαθηματικές έννοιες καθώς και ότι δυσκολεύονται να αντιμετωπίσουν μερικές φορές και απλά μαθηματικά προβλήματα που δεν εντάσσονται σε γνωστές σε αυτούς κατηγορίες προβλημάτων. Η σχολική τους επιτυχία οφείλεται στο ότι το μεγαλύτερο μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης από το δημοτικό σχολείο έως και το λύκειο διδάσκει διαδικασίες ("κάνε αυτό, μετά κάνε αυτό, μετά αυτό...") και οι μαθητές συνήθως αξιολογούνται αν μπορούν να εκτελέσουν σωστά τέτοιες διαδικασίες. Με άλλα λόγια, αυτό που μαθαίνουν οι περισσότεροι μαθητές είναι να εκτελούν ένα μεγάλο αριθμό τυποποιημένων διαδικασιών και να μπορούν να δώσουν απαντήσεις σε σαφώς οριοθετημένες κλάσεις ερωτήσεων. Με τον τρόπο αυτό, αποκτούν μια υπολογίσιμη μαθηματική γνώση αλλά δεν αναπτύσσουν εκείνη τη μαθηματική σκέψη που θα τους έδινε τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν τη γνώση τους για να λύσουν προβλήματα που δεν τους είναι γνωστή από πριν η διαδικασία επίλυσης τους.

Η διδασκαλία των Μαθηματικών πρέπει να γίνεται προσπάθεια να δείχνει στους μαθητές την εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης που οδηγεί στο αποτέλεσμα και παράλληλα να τους δίνει την δυνατότητα να συμμετέχουν ενεργά σε αυτή την εξέλιξη.

Παρακάτω θα παρουσιαστεί μια πορεία διδασκαλίας που αφορά στις έννοιες και στα θεωρήματα και συνδέεται με την επίτευξη του πρώτου στόχου. Η πορεία αυτή γίνεται προσπάθεια να περιέχει αρκετά από τα στοιχεία που τονίστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, είναι κοινή στα πρώτα στάδια και διαφοροποιείται στη συνέχεια ανάλογα με το αντικείμενο της διδασκαλίας, αν αυτό είναι έννοια ή θεώρημα.

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΕΝΝΟΙΩΝ

Όλα τα μαθηματικά αποτελέσματα, όπως τονίστηκε παραπάνω, έχουν αφετηρία τη λύση προβλημάτων. Συνεπώς, η διδασκαλία για την εισαγωγή μιας θεμελιώδους έννοιας καλό είναι να αρχίζει με ένα πρόβλημα που δεν αντιμετωπίζεται με τις υπάρχουσες γνώσεις και που η προσπάθεια για τη λύση του θα οδηγήσει στην ανάγκη της εισαγωγής της έννοιας.

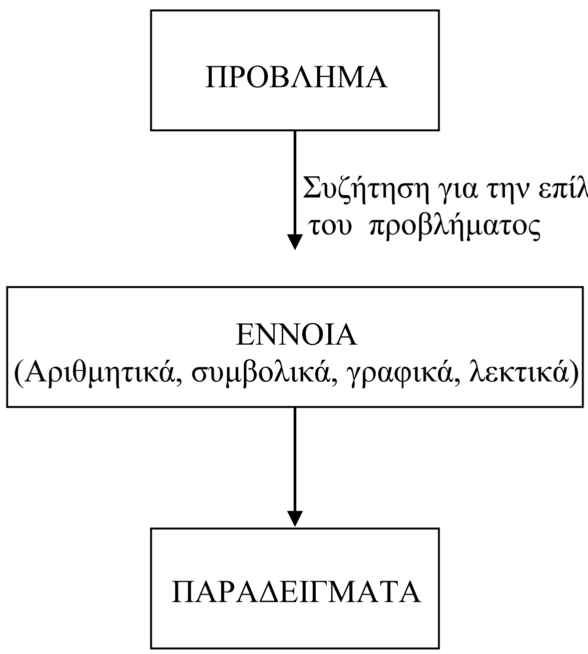
Όταν αντιμετωπίζουμε ένα πρόβλημα σκεφτόμαστε πως θα το λύσουμε. Συνεπώς το δεύτερο στάδιο της διδασκαλίας είναι η συζήτηση και ο προβληματισμός για την επίλυση του προβλήματος. Από τη συζήτηση αυτή θα προκύψει η ανάγκη εισαγωγής της νέας έννοιας.

Στο τρίτο στάδιο γίνεται συζήτηση για την διατύπωση του ορισμού της έννοιας και η περιγραφή του συμβολικά, γραφικά, λεκτικά. Η περιγραφές αυτές βοηθούν τον μαθητή στην καλύτερη κατανόηση του ορισμού και την δημιουργία εικόνας για την έννοια.

Στο τέταρτο στάδιο δίνονται παραδείγματα για την βαθύτερη κατανόηση της έννοιας, την αποφυγή παρανοήσεων και τον εμπλουτισμό της εικόνας της έννοιας. Τα παραδείγματα που θα δοθούν πρέπει να έχουν συγκεκριμένο σκοπό. Ο διδάσκων, συνδυάζοντας τη διδακτική του εμπειρία του και τις θεωρητικές γνώσεις του σχετικά με τη συγκεκριμένη έννοια (ιστορικές, μαθηματικές, διδακτικές), πρέπει κατά την προετοιμασία της διδασκαλίας του να εντοπίσει πιθανά εμπόδια που θα αντιμετωπίσουν οι μαθητές στην κατανόηση της έννοιας, να τα αναδείξει στη διδασκαλία του και να βρει τα κατάλληλα παραδείγματα για να τα αντιμετωπίσει ώστε οι μαθητές να δημιουργήσουν σωστή εικόνα για την έννοια.

Στη συνέχεια γίνεται σύνδεση της έννοιας με το αρχικό πρόβλημα

Το επόμενο διάγραμμα (σχήμα 12) περιγράφει σχηματικά την παραπάνω διαδικασία:



Σχήμα 12

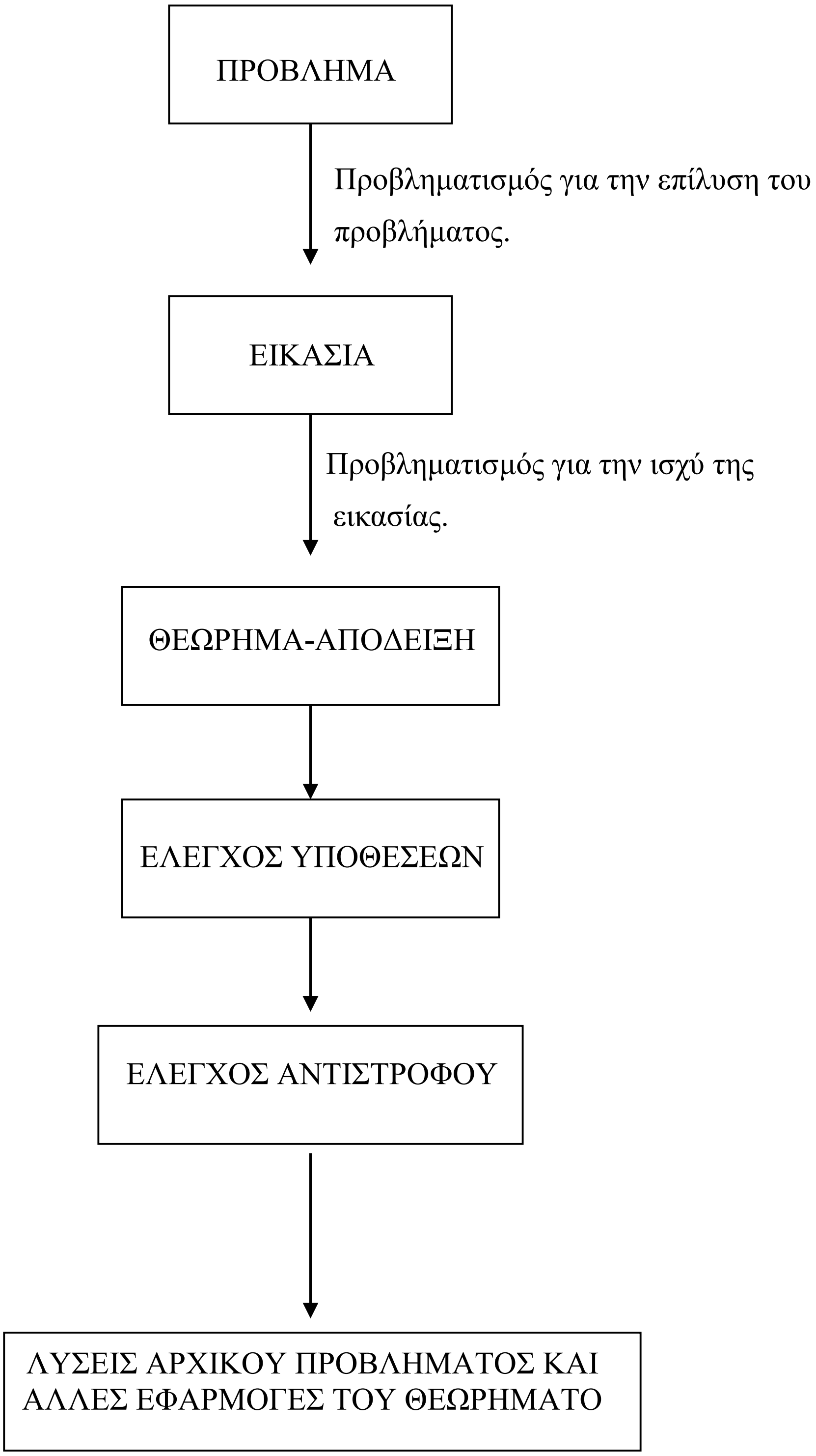
ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ

Όπως και στη διδασκαλία εννοιών έτσι και στη διδασκαλία θεωρημάτων, καλό είναι να ξεκινήσουμε με ένα πρόβλημα που δεν λύνεται με τις γνώσεις που έχουν οι μαθητές μέχρι εκείνη τη στιγμή.
Όταν αντιμετωπίζουμε ένα πρόβλημα σκεφτόμαστε διάφορους τρόπους για να το προσεγγίσουμε. Συνεπώς, και εδώ το δεύτερο στάδιο είναι συζήτηση σχετικά με την αντιμετώπιση του προβλήματος. Η συζήτηση θα οδηγήσει στη διαμόρφωση μιας εικασίας και σε προβληματισμό σχετικά με την ισχύ της εικασίας. Ο προβληματισμός αυτός οδηγεί στην πιο προσεκτική διαμόρφωση της εικασίας και στην πεποίθηση ότι αυτή ισχύει. Τότε φτάνουμε στο σημείο που διατυπώνουμε το θεώρημα και το αποδεικνύουμε, αν βέβαια η απόδειξη αυτή είναι στο πρόγραμμα σπουδών.
Μετά εξετάζουμε την αναγκαιότητα των υποθέσεων του θεωρήματος. Κάθε θεώρημα έχει κάποιες υποθέσεις και ένα συμπέρασμα. Οι υποθέσεις αυτές χρησιμοποιούνται στην απόδειξη του θεωρήματος αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι είναι πραγματικά αναγκαίες για το συμπέρασμα. Ενδεχομένως να μπορούσαμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα με μια άλλη απόδειξη, χρησιμοποιώντας λιγότερες υποθέσεις από αυτές που χρησιμοποιήσαμε. Για να είμαστε βέβαιοι ότι για να ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος είναι απαραίτητες όλες οι υποθέσεις που έχουμε στη διατύπωση του, δηλαδή ότι αν αφαιρεθεί μια υπόθεση οι υπόλοιπες δεν επαρκούν για να ισχύει το συμπέρασμα, πρέπει να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα που να ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις εκτός από αυτή και το συμπέρασμα να μην ισχύει. Μέρος ή και ολόκληρο αυτό το στάδιο μπορεί να έχει προηγηθεί της διατύπωσης κατά τη συζήτηση για την διαμόρφωση της εικασίας. Προφανώς αυτό δεν σημαίνει ότι δεν μπορεί να υπάρχουν άλλες υποθέσεις που οδηγούν στο ίδιο συμπέρασμα.
Π.χ. το θεώρημα του Bolzano λέει ότι:
“ Για κάθε συνάρτηση $f[a, \beta] \to R$ η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f(a)f(\beta)<0$ υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ ώστε $f(x_0)=0$.”
Οι υποθέσεις του θεωρήματος είναι ότι η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα και οι τιμές της στα άκρα του διαστήματος είναι ετερόσημες και το συμπέρασμα είναι ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της f στο οποίο αυτή μηδενίζεται. Για να είμαστε σίγουροι δεν αρκεί η μια από τις δύο υποθέσεις για να έχουμε το ίδιο συμπέρασμα, πρέπει να βρούμε δύο αντιπαραδείγματα. Ένα που ικανοποιείται μόνο η συνέχεια και δεν ισχύει το συμπέρασμα και ένα που ικανοποιείται μόνο η συνθήκη $f(a)f(\beta)<0$ και δεν ισχύει το συμπέρασμα.
Ένα άλλο σημείο που παρουσιάζει ενδιαφέρον σε ένα θεώρημα είναι αν μια υπόθεση μπορεί να αντικατασταθεί με μια άλλη γενικότερη. Π.χ. στο θεώρημα του Bolzano η συνάρτηση είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα. Αν το πεδίο ορισμού είναι ένα διάστημα, όχι υποχρεωτικά κλειστό, μπορούμε να έχουμε κάτι αντίστοιχο; Αν το πεδίο ορισμού είναι ένωση διαστημάτων τότε τι συμβαίνει; Τέτοιοι προβληματισμοί μπορούν να οδηγήσουν στη διαμόρφωση συγκεκριμένων προβλημάτων και γενικά βοηθούν τον μαθητή να αναπτύξει μια διερευνητική σκέψη.
Μετά τον έλεγχο της αναγκαιότητας των υποθέσεων ελέγχουμε την ισχύ ή όχι του αντιστρόφου. Και αυτό είναι ένα σημαντικό στοιχείο της μαθηματικής σκέψης το οποίο πολλές φορές αποτελεί την αρχή μιας πορείας που οδηγεί σε άλλα σημαντικά θεωρήματα.

Τέλος λύνουμε το αρχικό πρόβλημα, αν μπορεί να λυθεί, με το θεώρημα που αποδείξαμε και κάνουμε και άλλες εφαρμογές του. Μπορεί το θεώρημα που αποδείξαμε να μην λύνει το αρχικό πρόβλημα αλλά να αποτελεί ένα βήμα για την λύση του. Αυτό ενδεχομένως να δίνει τη δυνατότητα να συνεχιστεί ο προβληματισμός και να οδηγηθούμε και σε άλλα θεωρήματα. Επίσης οι εφαρμογές του θεωρήματος που θα γίνουν καθώς και οι ασκήσεις που θα δοθούν στο μαθητή για λύση πρέπει να είναι προσεκτικά επιλεγμένες ώστε να αναδεικνύουν τη σημασία του θεωρήματος και να έχουν συγκεκριμένο μαθηματικό ή διδακτικό στόχο.

Ορισμένες φορές η ουσιαστική μελέτη του θεωρήματος που αποδείξαμε μπορεί να θέσει νέα ερωτήματα που με τη σειρά τους να οδηγήσουν σε νέα θεωρήματα.

Το επόμενο διάγραμμα (σχήμα 13) περιγράφει σχηματικά την παραπάνω διαδικασία.


ΠΡΟΒΛΗΜΑ
Προβληματισμός για την επίλυση του προβλήματος.
ΕΙΚΑΣΙΑ
Προβληματισμός για την ισχύ της εικασίας.
ΘΕΩΡΗΜΑ-ΑΠΟΔΕΙΞΗ
ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ
ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ
ΛΥΣΕΙΣ ΑΡΧΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΑΛΛΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟ

Σχήμα 13

Τα παραπάνω σχήματα για τη διδασκαλία εννοιών και θεωρημάτων είναι ενδεικτικά και οπωσδήποτε δεν μπορεί να έχουν απόλυτη και καθολική εφαρμογή. Δίνουν όμως συγκεκριμένα στοιχεία για τη διδασκαλία τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν ανάλογα με τις συνθήκες. Είναι σαφές ότι οι χρονικοί περιορισμοί που υπάρχουν στη διδασκαλία αποτελούν έναν αντικειμενικό παράγοντα που δεν μπορεί να αγνοηθεί. Η ανάγκη της ολοκλήρωσης της ύλης αποτελεί εμπόδιο στην ανάπτυξη διδασκαλιών όπως αυτή που περιγράφεται παραπάνω. Ο εκπαιδευτικός όμως έχει τη δυνατότητα να επιλέξει ορισμένες θεμελιώδεις έννοιες (όπως είναι π.χ. η έννοια του ορίου) και ορισμένα σημαντικά θεωρήματα ή ομάδες θεωρημάτων (όπως είναι π.χ. τα θεωρήματα Μέσης Τιμής ή το θεώρημα που συνδέει το πρόσημο της παραγώγου με την μονοτονία της συνάρτησης) και, αντί να εξαντλήσει το χρόνο διδασκαλίας στην εξάσκηση των μαθητών στην επίλυση σειράς πανομοιότυπων ασκήσεων, να ακολουθήσει μια τέτοια πορεία ώστε να έλθει σε επαφή ο μαθητής, όχι μόνο με το αποτέλεσμα της μαθηματικής σκέψης, αλλά και με την διαδικασία που οδηγεί σε αυτό. Σε επόμενες ενότητες θα δούμε ενδεικτικά παραδείγματα τέτοιων διδακτικών προσεγγίσεων.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Ζαχαριάδης Θεοδόσιος. «Διδακτική Απειροστικού Λογισμού. Ενότητα 1: Γενικά θέματα σχετικά με τη διδασκαλία των Μαθηματικών». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH127/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.