Δημήτρης Χελιώτης

# ΕΝΑ ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΑΘΗΜΑ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
HEALLINK
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΕΛΙΩΤΗΣ
Επίκουρος καθηγητής
Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνων

# Ένα δεύτερο μάθημα στις πιθανότητες

Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά
Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

# Ένα δεύτερο μάθημα στις πιθανότητες

**Συγγραφή**

Δημήτρης Χελιώτης

**Κριτικός αναγνώστης**

Μιχάλης Λουλάκης

**Συντελεστές έκδοσης**

Γλωσσική Επιμέλεια: Θεόφιλος Τραμπούλης



ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

www.kallipos.gr

ISBN:978-960-603-296-7

# Περιεχόμενα

# Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές απευθύνονται σε προπτυχιακούς φοιτητές που έχουν ασχοληθεί με τις στοιχειώδεις πιθανότητες, έχουν καλή γνώση του απειροστικού λογισμού, και κάποια τριβή με την πραγματική ανάλυση (μετρικοί χώροι και συνεχείς συναρτήσεις σε μετρικούς χώρους).

Δύο είναι οι στόχοι των σημειώσεων. Πρώτα να δούμε την ορολογία της μετροθεωρητικής θεωρίας πιθανοτήτων (Κεφάλαια 1-10, 13, 14) και έπειτα να μελετήσουμε την οριακή συμπεριφορά ακολουθιών τυχαίων μεταβλητών. Ασχολούμαστε με τα δύο σημαντικότερα είδη σύγκλισης της θεωρίας πιθανοτήτων, τη σχεδόν βέβαιη και την κατά κατανομή. Έτσι, καλύπτουμε τη βασική τεχνική για την απόδειξη αποτελεσμάτων για καθεμία από αυτές (Κεφάλαιο 11 για την πρώτη, Κεφάλαιο 15 για τη δεύτερη) και τέλος βλέπουμε τα δύο πιο αντιπροσωπευτικά θεωρήματα που αυτές εμφανίζονται: τον Ισχυρό Νόμο των Μεγάλων Αριθμών και το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

Αυτή η δουλειά βάζει σε αυστηρό πλαίσιο την ύλη που καλύπτεται σε μαθήματα στοιχειωδών πιθανοτήτων. Πολλά αποτελέσματα τα οποία είχαμε μάθει να χρησιμοποιούμε σε εκείνα τα μαθήματα χωρίς όμως αποδείξεις, εδώ τα αποδεικνύουμε.

Στο κομμάτι των σημειώσεων που αφορούν τη θεωρία μέτρου (ιδιαίτερα στα Κεφάλαια 5 και 6 ) δεν δίνουμε αποδείξεις για όλα τα αποτελέσματα που διατυπώνουμε γιατί είναι πέρα από τους στόχους μας. Από τα μετέπειτα κεφάλαια, δεν δίνουμε απόδειξη για το θεώρημα μοναδικότητας που αφορά τον μετασχηματισμό Fourier μέτρων και για το θεώρημα Prokhorov (Θεώρημα 14.19). Για κάποια άλλα αποτελέσματα, η απόδειξη παρατίθεται στο Παράρτημα Β′ γιατί, μολονότι δεν είναι τόσο σημαντική για την κατανόηση της θεωρίας, είναι, σε δεύτερη ανάγνωση, προσιτή και ωφέλιμη.

Σε ένα εξάμηνο είναι δυνατόν να καλυφθούν όλες οι σημειώσεις εκτός από τις παραγράφους που σημειώνονται με αστερίσκο. Τα Κεφάλαια 1-6, 8, 9 συνήθως διδάσκονται σε μαθήματα θεωρίας μέτρου, και με μεγαλύτερη λεπτομέρεια. Οι αναγνώστες που έχουν ήδη πάρει ανάλογο μάθημα μπορούν απλώς να ρίξουν μια γρήγορη ματιά σε αυτά τα κεφάλαια για να δουν την ορολογία και τον συμβολισμό που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια. Ωστόσο, συνιστάται θερμά η επίλυση ασκήσεων από τα κεφάλαια αυτά. Για τη μείωση του χρόνου που αφιερώνεται στη θεωρία μέτρου συνιστάται η παράλειψη του Κεφαλαίου 3. Το θεώρημα π-λ, που παρουσιάζεται εκεί, χρησιμοποιείται μόνο στις αποδείξεις των Θεωρημάτων 4.10, 10.6 , 10.11, 11.10.

Η πλειονότητα των ασκήσεων είναι ασκήσεις τριβής και εξοικείωσης με τις έννοιες. Κάποιες είναι προεκτάσεις της θεωρίας. Όσες έχουν αστερίσκο είναι λίγο δυσκολότερες.

Βάση για αυτές τις σημειώσεις υπήρξαν οι σημειώσεις παραδόσεων του μαθήματος Πιθανότητες ΙΙ όπως διδάχθηκε το εαρινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2012-2013. Ακολουθήσαμε τότε κυρίως το βιβλίο Probability Essentials των Jacod-Protter. Τα υπόλοιπα βιβλία που τις επηρέασαν αναγράφονται στη βιβλιογραφία. Ευχαριστώ τον Παύλο Τσατσούλη, ο οποίος έγραψε το πρώτο προσχέδιο των σημειώσεων σε Latex.

Επίσης ευχαριστώ: Τον συνάδελφο Αντώνη Τσολομύτη για τη βοήθεια σε θέματα Latex και τη διαμόρφωση της εμφάνισης του κειμένου. Δύο ανώνυμους αξιολογητές που στο πλαίσιο του προγράμματος «Κάλλιπος» έκαναν χρήσιμες παρατηρήσεις σε προηγούμενη έκδοση των σημειώσεων. Τον συνάδελφο Μιχάλη Λουλάκη που μελέτησε προσεκτικά τις σημειώσεις και έκανε πολλές διορθώσεις και προτάσεις για προσθήκες/αλλαγές και ασκήσεις που συνέβαλαν στη σημαντική βελτίωση των σημειώσεων.

**Τα θεμελιώδη θεωρήματα**

Το πρώτο μισό του 20ου αιώνα, το βασικότερο αντικείμενο μελέτης της θεωρίας πιθανοτήτων ήταν το άθροισμα $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών και το ενδιαφέρον επικεντρώθηκε στην συμπεριφορά του $S_n$ για μεγάλα $n$ για τις διάφορες επιλογές που έχει η κοινή κατανομή των $X_i$. Ας έχουμε για τα επόμενα στο μυαλό μας την ειδική περίπτωση που αυτή η κατανομή είναι η ομοιόμορφη στο δισύνολο $\{-1, 1\}$. Τότε το $S_n$ είναι το συνολικό κέρδος μας μετά από $n$ ανεξάρτητα παιχνίδια σε καθένα από τα οποία κερδίζουμε 1 με πιθανότητα 1/2 και χάνουμε 1 πάλι με πιθανότητα 1/2. Τι μπορούμε να πούμε για αυτό;

Τα θεμελιώδη θεωρήματα που αποδείχθηκαν για το $S_n$ είναι τα εξής.

(α) Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών (Borel, 1909˙ Kolmogorov, 1933). Υποθέτουμε ότι $\mathbf{E}(X_1) = 0$. Με πιθανότητα 1,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0.$$

(β) Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Lindeberg, Lévy 1922). Υποθέτουμε ότι $\mathbf{E}(X_1) = 0, \mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Για $n \to \infty$,

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow Y \sim N(0, \sigma^2),$$

όπου $\Rightarrow$ δηλώνει τη σύγκλιση κατά κατανομή και $Y \sim N(0, \sigma^2)$ σημαίνει ότι η τυχαία μεταβλητή $Y$ ακολουθεί την κατανομή $N(0, \sigma^2)$.

(γ) Νόμος Επαναλαμβανόμενου Λογαρίθμου (Khintchine, 1923˙ Kolmogorov, 1929˙ Hartman-Wintner, 1941). Υποθέτουμε ότι $\mathbf{E}(X_1) = 0, \mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Με πιθανότητα 1,

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sigma\sqrt{2n\log\log n}} = -1, \tag{1}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sigma\sqrt{2n\log\log n}} = 1. \tag{2}$$

(δ) Μεγάλες αποκλίσεις. Θεώρημα Cramer (1938). Υποθέτουμε ότι $\mathbf{E}(X_1) = 0$. Υπάρχει συνάρτηση $I : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ ώστε, για κάθε $A \subset \mathbb{R}$ σύνολο Borel (που επιπλέον ικανοποιεί μια τεχνική συνθήκη), να ισχύει

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in A\right) \approx e^{-nI(A)}.$$

Εδώ, $a_n \approx b_n$ σημαίνει ότι οι $a_n, b_n$ είναι ισοδύναμες σε λογαριθμική κλίμακα, δηλαδή $\log a_n / \log b_n \to 1$. Μάλιστα, αν υποθέσουμε ότι η ροπογεννήτρια της $X_1$ είναι πεπερασμένη σε περιοχή του 0, τότε η συνάρτηση $I$ είναι τέτοια ώστε $I(A) > 0$ όταν $0 \notin \bar{A}$.

Αν αντί της υπόθεσης $\mathbf{E}(X_1) = 0$ πιο πάνω έχουμε απλώς ότι η μέση τιμή $\mu := \mathbf{E}(X_1)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμος, τότε τα θεωρήματα ισχύουν πάλι αρκεί να αντικαταστήσουμε την $S_n$ με την $S_n - \mu n$.

Τώρα κάποια σχόλια στα πιο πάνω θεωρήματα.

Ένα γεγονός για το $S_n$ το λέμε τυπικό αν, καθώς το $n$ τείνει στο άπειρο, το γεγονός έχει πιθανότητα φραγμένη μακριά από το 0 (π.χ. είναι μεγαλύτερη του $10^{-6}$ για όλα τα $n$), αλλιώς το λέμε μη τυπικό.

Τα θεωρήματα (α), (β) αφορούν τυπικά γεγονότα για το $S_n$ (τυπική συμπεριφορά της $(S_n)_{n\geq 1}$). Το (α) αναφέρεται στο γεγονός $|S_n/n| < \varepsilon$ (για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$) και συνεπάγεται ότι η πιθανότητά του τείνει στο 1. Το (β) λέει ότι το $S_n$ είναι τυπικά της τάξης $\sqrt{n}$. Μάλιστα, για $a < b$, το γεγονός $a\sigma < S_n/\sqrt{n} < b\sigma$ έχει πιθανότητα που συγκλίνει στον θετικό αριθμό $\Phi(b) - \Phi(a)$, άρα είναι τυπικό.

Τα (γ), (δ) αφορούν μη τυπική συμπεριφορά του $S_n$.

Σχετικά με το (γ). Ξέρουμε ήδη από το (β) ότι το $S_n$ είναι τυπικά της τάξης του $\sqrt{n}$, και ένα γεγονός της μορφής

$$A_n := \left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \in ((1-\varepsilon)a_n, (1+\varepsilon)a_n)\right\}$$

με $a_n \to \infty$ έχει πιθανότητα που τείνει στο 0. Ειδικά για την επιλογή $a_n := \sigma\sqrt{2\log\log n}$ έχουμε ότι για οποιοδήποτε δεδομένο $n$ η πιθανότητα του $A_n$ είναι πολύ μικρή (και γίνεται αμελητέα για μεγάλο $n$), όμως σύμφωνα με το (γ), αν παρατηρήσουμε ολόκληρη την τροχιά της $(S_n)_{n\geq 1}$, θα διαπιστώσουμε ότι το $S_n$ κατορθώνει άπειρες φορές να πραγματοποιήσει το $A_n$, δηλαδή να γίνει της τάξης $\sqrt{n}a_n$ (όπως και της τάξης $-\sqrt{n}a_n$). Η $(a_n)_{n\geq 1}$ δίνει πόσο μεγάλο μπορεί να γίνει το $S_n$ άπειρες φορές. Έτσι, για παράδειγμα, στην περίπτωση που η $X_1$ είναι ομοιόμορφη στο $\{-1, 1\}$, αν και το γεγονός $S_n = n/2$ είναι εφικτό (έχει θετική πιθανότητα), με πιθανότητα 1 δεν μπορεί να γίνει άπειρες φορές.

Σχετικά με το (δ). Το (α) συνεπάγεται ότι για οποιοδήποτε σύνολο $A$ με $0 \notin \bar{A}$ η πιθανότητα του γεγονότος $S_n/n \in A$ τείνει στο 0. Άρα μιλάμε για ένα μη τυπικό γεγονός. Το Θεώρημα Cramer προσδιορίζει το ρυθμό μείωσης της πιθανότητας του.

Σε αυτές τις σημειώσεις θα δούμε τις αποδείξεις των (α), (β), (δ).

Τα θεωρήματα (α), (β), (γ), (δ) και οι τεχνικές απόδειξής τους λειτουργούν ως υπόδειγμα για την ασυμπτωτική μελέτη ακολουθιών τυχαίων μεταβλητών που ενδεχομένως είναι πιο σύνθετες από την $S_n$.

Δημήτρης Χελιώτης
29 Ιανουαρίου 2016

# Σύμβολα

$\mathbb{N}$ το σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων $\{0, 1, 2, \ldots\}$.
$\mathbb{N}^+$ το σύνολο των θετικών ακεραίων $\{1, 2, \ldots\}$.

Για $n \in \mathbb{N}^+$,

$$[n] := \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Για ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\geq 1}$,

$$\limsup_n A_n := \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k,$$
$$\liminf_n A_n := \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Για $A, B$ σύνολα, $A \subset B$: το $A$ είναι υποσύνολο του $B$ (όχι απαραίτητα γνήσιο).

Για $A, B$ σύνολα, $A \backslash B := \{x \in A : x \notin B\}$.

Για $X$ σύνολο,

$$\mathscr{P}(X) := \{A : A \subset X\},$$

το δυναμοσύνολο του $X$.

Για $X$ μετρικό χώρο,

$$\mathscr{B}(X) : \text{ η σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του } X.$$

Για $A$ υποσύνολο τοπολογικού χώρου (π.χ., μετρικού χώρου),

$$A^\circ : \text{ το εσωτερικό του } A,$$
$$\bar{A} : \text{ η κλειστότητα του } A,$$
$$\partial A := \bar{A} \backslash A^\circ : \text{ το σύνορο του } A.$$

Για $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x \wedge y := \min\{x, y\},$$
$$x \vee y := \max\{x, y\}.$$

Για $x \in \mathbb{R}$,

$$x^+ = x \vee 0 = \begin{cases} x & \text{αν } x > 0, \\ 0 & \text{αν } x \leq 0, \end{cases} \qquad x^- = (-x) \vee 0 = \begin{cases} -x & \text{αν } x < 0, \\ 0 & \text{αν } x \geq 0. \end{cases}$$

# 1

# σ-άλγεβρες

## 1.1 σ-άλγεβρες

Έστω $X$ σύνολο. Συμβολίζουμε με $\mathscr{P}(X)$ το δυναμοσύνολο του $X$, δηλαδή $\mathscr{P}(X) = \{A : A \subset X\}$.

**Ορισμός 1.1.** Έστω $X$ σύνολο. Μια οικογένεια $\mathcal{A} \subset \mathscr{P}(X)$ λέγεται **άλγεβρα** στο $X$ αν έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(ii) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $X \backslash A \in \mathcal{A}$.

(iii) Για κάθε $n \geq 2$, αν $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$, τότε $\cup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$. Δηλαδή η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες ενώσεις.

**Παρατήρηση 1.2.** Για μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ ισχύει επίσης

- $X \in \mathcal{A}$ λόγω των (i) και (ii), εφόσον το $X$ είναι το συμπλήρωμα του $\emptyset$.
- Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, εφόσον αν $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$, τότε $\cap_{i=1}^{n} A_i = X \backslash \{\cup_{i=1}^{n} (X \backslash A_i)\}$ και άρα, λόγω των (ii) και (iii), ισχύει $\cap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.
- Αν $A, B \in \mathcal{A}$, τότε $A \backslash B \in \mathcal{A}$, εφόσον $A \backslash B = A \cap (X \backslash B)$.

**Παράδειγμα 1.3.** Αν $X$ σύνολο, τότε οι οικογένειες

$$\mathcal{A}_1 := \{\emptyset, X\},$$
$$\mathcal{A}_2 := \mathscr{P}(X),$$

είναι άλγεβρες στο $X$.

**Παράδειγμα 1.4.** Στο $X = \mathbb{R}$ η $\mathcal{A} = \{A \in \mathbb{R} : A \text{ πεπερασμένη ένωση διαστημάτων}\}$ είναι άλγεβρα (Άσκηση)

**Ορισμός 1.5.** Έστω $X$ σύνολο. Μια οικογένεια $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ λέγεται **σ-άλγεβρα** στο $X$ αν έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(ii) Αν $A \in \mathcal{A}$, τότε $X \backslash A \in \mathcal{A}$.

(iii) Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις, δηλαδή αν $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$, τότε $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

**Παρατήρηση 1.6.** Από τους Ορισμούς 1.1, 1.5 είναι ξεκάθαρο ότι μία σ-άλγεβρα είναι άλγεβρα. Επίσης, ανάλογα με την περίπτωση της άλγεβρας, για μια σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ ισχύει ότι

- $X \in \mathcal{A}$.

- Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες τομές εφόσον $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = X \setminus \{\cup_{n\in\mathbb{N}}(X\setminus A_n)\}$.
- Αν $A, B \in \mathcal{A}$, τότε $A\setminus B \in \mathcal{A}$.

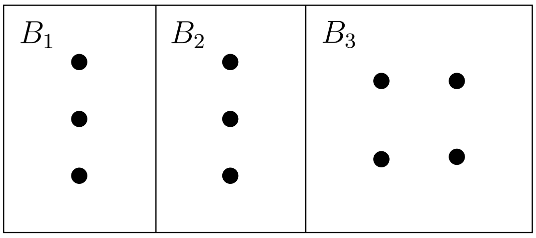
**Παρατήρηση 1.7.** Δεν ισχύει παντα ότι μια άλγεβρα είναι σ-άλγεβρα. Στο Παράδειγμα 1.4, η οικογένεια $\mathcal{A}$ δεν ειναι σ-άλγεβρα, γιατί, ενώ $(2n, 2n+1) \in C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η αριθμήσιμη ένωση $\cup_{n=1}^{\infty}(2n, 2n+1)$ δεν ανήκει στην $\mathcal{A}$.

**Παράδειγμα 1.8.** Οι οικογένειες $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ στο Παράδειγμα 1.3 είναι σ-άλγεβρες. Η πρώτη είναι η ελάχιστη δυνατή και η δεύτερη η μέγιστη δυνατή σ-άλγεβρα στο $X$.

**Παράδειγμα 1.9.** Έστω $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Θέτουμε $B_1 := \{1, 2, 3\}, B_2 := \{4, 5, 6\}, B_3 := \{7, 8, 9, 10\}$. Η οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, X, B_1, B_2, B_3, B_1 \cup B_2, B_1 \cup B_3, B_2 \cup B_3\}$$

είναι σ-άλγεβρα στο $X$. Για παράδειγμα, το συμπλήρωμα του $B_2$ είναι το $B_1 \cup B_3$ το οποίο βρίσκεται και αυτό στην $\mathcal{A}$.




Σχήμα 1.1: Μία διαμέριση του $\{1, 2, \ldots, 10\}$.

Αντίθετα, η

$$\mathcal{B} = \{\emptyset, X, B_1, B_2, B_1 \cup B_2\}$$

δεν είναι σ-άλγεβρα γιατί, ενώ είναι κλειστή στις ενώσεις, δεν είναι κλειστή στα συμπληρώματα. Τα συμπληρώματα των $B_1, B_2, B_1 \cup B_2$ δεν περιέχονται στην $\mathcal{B}$.

**Παράδειγμα 1.10.** Έστω $X = \mathbb{R}$. Η οικογένεια

$$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ αριθμήσιμο ή } \mathbb{R}\setminus A \text{ αριθμήσιμο}\}$$

είναι σ-άλγεβρα (εύκολη άσκηση). Το κενό είναι αριθμήσιμο και το $\mathbb{R}$ έχει αριθμήσιμο συμπλήρωμα (το κενό), άρα και τα δύο ανήκουν στην $\mathcal{A}$.

**Πρόταση 1.11.** *Έστω $X$ σύνολο και $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ οικογένεια σ-αλγεβρών στο $X$. Τότε, η*

$$\mathcal{H} = \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i := \{A \in X : A \in \mathcal{A}_i \quad \forall i \in I\}$$

*είναι σ-άλγεβρα στο $X$.*

*Απόδειξη.* Προφανώς τα $\emptyset$, $X$ ανήκουν στην $\mathcal{H}$ γιατί και τα δύο είναι στοιχεία κάθε σ-άλγεβρας $\mathcal{A}_i$ στο $X$. Αν $A \in \mathcal{A}_i$ για κάθε $i \in I$, τότε, επειδή κάθε $\mathcal{A}_i$ είναι σ-άλγεβρα, έπεται ότι

$$X\setminus A \in \mathcal{A}_i \quad \forall i \in I,$$

δηλαδή $X\setminus A \in \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$. Όμοια αποδεικνύουμε ότι η $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις. Έπεται λοιπόν ότι η $\mathcal{H}$ είναι σ-άλγεβρα. ∎

## 1.2 Παραγόμενη $\sigma$-άλγεβρα

**Ορισμός 1.12.** Έστω $X$ σύνολο και $C \subset \mathscr{P}(X)$. Ορίζουμε

$$\mathcal{J} := \{\mathcal{A} \subset \mathscr{P}(X) : \mathcal{A} \supset C \text{ και η } \mathcal{A} \text{ είναι σ-άλγεβρα}\},$$

δηλαδή το σύνολο των σ-αλγεβρών στο $X$ που καθεμία τους περιέχει την οικογένεια $C$. Η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $C$ ορίζεται ως η τομή όλων των σ-άλγεβρων που περιέχουν την $C$ και συμβολίζεται με $\sigma(C)$, δηλαδή

$$\sigma(C) = \cap_{\mathcal{A}\in\mathcal{J}}\mathcal{A}.$$

Η $\sigma(C)$ περιέχει ακριβώς όλα τα $B \subset X$ με την ιδιότητα $B \in \mathcal{A}$ για κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο $X$ με $\mathcal{A} \supset C$.

Από την Πρόταση 1.11, έπεται ότι η $\sigma(C)$ είναι πράγματι σ-άλγεβρα που περιέχει την οικογένεια $C$ και από την κατασκευή της είναι η μικρότερη με την ιδιότητα αυτή. Δηλαδή περιέχεται σε οποιανδήποτε σ-άλγεβρα περιέχει την $C$. Προφανώς, αν η $C$ είναι σ-άλγεβρα, τότε $\sigma(C) = C$.

Μπορούμε να έχουμε στο μυαλό μας ότι η $\sigma(C)$ προκύπτει με την εξής αναδρομική διαδικασία. Ξεκινάμε με την $C$ και, αν αυτή δεν είναι σ-άλγεβρα, π.χ., γιατί το συμπλήρωμα ενός στοιχείου της ή κάποια αριθμήσιμη ένωση στοιχείων της δεν είναι στοιχείο της, προσθέτουμε σε αυτή το σύνολο που ανακαλύψαμε ότι της λείπει. Αυτό πρέπει να το κάνουμε πολλές φορές με τη νέα οικογένεια που προκύπτει μετά την προσθήκη κάθε συνόλου. Κάποια στιγμή φτάνουμε σε μια οικογένεια που είναι σ-άλγεβρα και τότε σταματάμε, βρήκαμε τη $\sigma(C)$.

Στα πιο κάτω παραδείγματα, αυτό είναι το σκεπτικό που μας οδηγεί. Βέβαια για την απόδειξη ακολουθούμε τον τυπικό ορισμό της $\sigma(C)$.

**Παράδειγμα 1.13.** Έστω $X$ μη κενό σύνολο με τουλάχιστον δύο στοιχεία και $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$. Η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια $C := \{A\}$ είναι η $\mathcal{B} := \{\emptyset, X, A, A^c\}$. Πράγματι, η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα, και οποιαδήποτε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ περιέχει το $A$ θα πρέπει να περιέχει και το $A^c$ (και τα $\emptyset, X$ βέβαια), άρα $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$.

**Παράδειγμα 1.14.** Επιστρέφουμε στο Παράδειγμα 1.9. Η οικογένεια $\mathcal{B}$ δεν είναι σ-άλγεβρα, και με σκεπτικό όπως στο προηγούμενο παράδειγμα διαπιστώνουμε ότι $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$.

**Παράδειγμα 1.15** (Σ-άλγεβρα παραγόμενη από διαμέριση)**.** Έστω $X$ σύνολο και $C := \{A_i : i \in I\}$ διαμέριση του $X$ (δηλαδή τα $A_i$ είναι μη κενά σύνολα, ξένα ανά δύο, με ένωση το $X$), με $I = \{1, 2, \dots, k\}$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ή $I = \mathbb{N}$. Για τη σ-άλγεβρα που παράγει η $C$ έχουμε την εξής απλή περιγραφή:

$$\sigma(C) = \{\cup_{i\in J}A_i : J \subset I\}. \tag{1.1}$$

Δηλαδή ένα σύνολο της $\sigma(C)$ είναι ένωση κάποιων στοιχείων της διαμέρισης $C$.
Ας ονομάσουμε $\mathcal{A}$ το σύνολο στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης. Τότε έχουμε τα εξής:

- Η οικογένεια $\mathcal{A}$ περιέχει τη $C$. Πράγματι, οποιοδήποτε σύνολο της $C$ είναι της μορφής $A_{i_0}$ για κάποιο $i_0 \in I$. Η επιλογή $J = \{i_0\} \subset I$ στην περιγραφή στοιχείων της $\mathcal{A}$ δίνει $\cup_{i\in J}A_i = A_{i_0} \in \mathcal{A}$.

- Οποιαδήποτε σ-άλγεβρα $\mathcal{A}_1$ περιέχει την $C$ πρέπει να περιέχει την $\mathcal{A}$. Γιατί οποιαδήποτε ένωση $\cup_{i\in J}A_i$ είναι αριθμήσιμη αφού το $I$ είναι αριθμήσιμο. Και εφόσον η $\mathcal{A}_1$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα $A_i$ με $i \in J$, θα περιέχει και την ένωσή τους.

- Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα. Πράγματι, η επιλογή $J = \emptyset$ δίνει $\cup_{i\in J}A_i = \emptyset$. Επίσης, αν πάρουμε $A$ της μορφής $A = \cup_{i\in J}A_i$ για κάποιο $J \subset I$, τότε $X\backslash A = \cup_{i\in I\backslash J}A_i$ που είναι στοιχείο της $\mathcal{A}$. Τέλος, αν έχουμε ακολουθία $(B_n)_{n\geq 1}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$ με $B_n = \cup_{i\in J_n}A_i$ όπου $J_n \subset I$ για κάθε $n \geq 1$, τότε για $J := \cup_{n=1}^{\infty}J_n$ έχουμε $\cup_{n=1}^{\infty}B_n = \cup_{i\in J}A_i$ που πάλι είναι στοιχείο της $\mathcal{A}$.

Συνδυάζοντας αυτές τις τρεις παρατηρήσεις παίρνουμε την (1.1).

## 1.3 Τα σύνολα Borel

Αν $(X, d)$ είναι ένας μετρικός χώρος, τότε ένα $A \subset X$ το λέμε ανοιχτό σύνολο αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x, \delta) := \{y \in X : d(y, x) < \delta\} \subset A$, δηλαδή η σφαίρα ακτίνας $\delta$ γύρω από το $x$ είναι υποσύνολο του $A$. Γενικά, το $\delta$ εξαρτάται από το $x$.

Τα σύνολα $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ θα τα θεωρούμε μετρικούς χώρους με μετρική την Ευκλείδεια. Δηλαδή

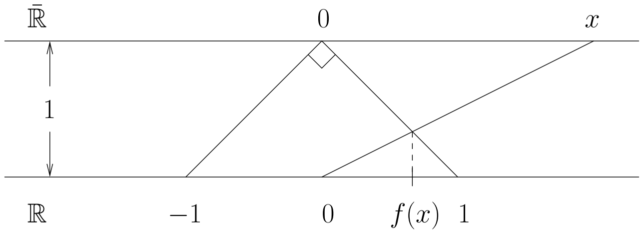
$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}$$

για $x, y \in \mathbb{R}^n$ (ή $x, y \in \mathbb{C}^n$) με $|\cdot|$ να συμβολίζει την απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού(το μέτρο μιγαδικού, αντίστοιχα).

Θα χρειαστεί πιο κάτω να δουλέψουμε και με το σύνολο $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Αυτό θα το θεωρούμε μετρικό χώρο με μετρική την

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

όπου $f(x) = x/(1 + |x|)$ για $x \in \mathbb{R}$ και $f(-\infty) = -1, f(\infty) = 1$. Απεικονίζουμε τον $\bar{\mathbb{R}}$ στο τμήμα $[-1, 1]$ μέσω της $f$ και μετά ορίζουμε την απόσταση δύο σημείων του ως την συνηθισμένη απόσταση των εικόνων τους στο $[-1, 1]$. Δες Σχήμα 1.2. Ο περιορισμός της μετρικής αυτής στο $\mathbb{R}$ είναι μια μετρική




Σχήμα 1.2: Γεωμετρική ερμηνεία της απεικόνισης $f(x) = x/(1 + |x|)$. Το $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ απεικονίζεται στο $[-1, 1]$.

ισοδύναμη με τη συνηθισμένη μετρική του $\mathbb{R}$. Σχετικά με το $\infty$, εύκολα βλέπει κανείς ότι για $0 < \varepsilon < 1$ η σφαίρα ακτίνας $\varepsilon$ γύρω από το $\infty$ είναι η ημιευθεία $(1 - \varepsilon^{-1}, \infty]$ (αντίστοιχη παρατήρηση ισχύει και για το $-\infty$).

Γενικά, η οικογένεια $\mathcal{T}$ των ανοικτών συνόλων σε ένα μετρικό χώρο δεν είναι σ-άλγεβρα και συνήθως δεν είναι καν άλγεβρα. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}$ το $A = (0, 1)$ είναι ανοιχτό, ενώ το συμπλήρωμά του δεν είναι. Θα μας φανεί χρήσιμο όμως να θεωρήσουμε την σ-άλγεβρα που παράγουν τα ανοιχτά σύνολα.

**Ορισμός 1.16.** Έστω $(X, d)$ μετρικός χώρος. Η σ-άλγεβρα $\sigma(\mathcal{T})$ που παράγεται από την οικογένεια $\mathcal{T}$ των ανοιχτών συνόλων του $X$ ονομάζεται **σ-άλγεβρα Borel** και τα στοιχεία της **σύνολα Borel**. Συνήθως συμβολίζουμε τη $\sigma(\mathcal{T})$ με $\mathscr{B}(X)$.

Η $\mathscr{B}(X)$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοιχτά σύνολα.

**Πρόταση 1.17.** *Κάθε ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου $(X, \mathcal{T})$ είναι σύνολο Borel.*

*Απόδειξη.* Απο τον ορισμό των συνόλων Borel έχουμε $\mathcal{T} \subset \sigma(\mathcal{T}) =: \mathscr{B}(X)$. Αν $F$ είναι κλειστό, τότε $X \backslash F \in \mathscr{B}(X)$ ως ανοικτό. Αλλά η $\mathscr{B}(X)$ είναι σ-άλγεβρα, οπότε πρέπει και το συμπλήρωμα του $X \backslash F$ να περιέχεται στην $\mathscr{B}(X)$. Άρα $F \in \mathscr{B}(X)$. ∎

**Πρόταση 1.18.** *Κάθε υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel.*

*Απόδειξη.* Τα διάφορα σενάρια για ένα υποδιάστημα είναι

$$(-\infty, a], [a, \infty), (-\infty, a), (a, \infty), (a, b), [a, b], (a, b], [a, b).$$

Τα πρώτα δύο είναι κλειστά σύνολα, τα επόμενα τρία είναι ανοιχτά και το $[a, b]$ είναι κλειστό. Για το $(a, b]$ γράφουμε

$$(a, b] = \mathbb{R}\backslash((-\infty, a] \cup (b, \infty)).$$

Επειδή η $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ είναι σ-άλγεβρα και $(-\infty, a], (b, \infty) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, έπεται ότι $(-\infty, a] \cup (b, \infty) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ και $\mathbb{R}\backslash((-\infty, a] \cup (b, \infty)) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Όμοια δείχνουμε ότι $[a, b) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. ■

Επειδή η $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει όλα τα διαστήματα, έπεται ότι όλα τα σύνολα που φτιάχνουμε ξεκινώντας από διαστήματα και εφαρμόζοντας αριθμήσιμο πλήθος επαναλήψεων τις πράξεις της ένωσης, της τομής, και του συμπληρώματος θα είναι επίσης στοιχεία της $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

**Θεώρημα 1.19.** *Έστω $\mathcal{F}$ η οικογένεια των κλειστών συνόλων του $\mathbb{R}$ και*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\},\\
\mathcal{A}_2 &= \{(a, b] : a < b, \quad a, b \in \mathbb{R}\},\\
\mathcal{A}_3 &= \{(a, b) : a < b, \quad a, b \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

*Τότε $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2) = \sigma(\mathcal{A}_3)$.*

*Απόδειξη.* Θα δείξουμε ότι

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) \supset \sigma(\mathcal{F}) \supset \sigma(\mathcal{A}_1) \supset \sigma(\mathcal{A}_2) \supset \sigma(\mathcal{A}_3) \supset \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Η $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ περιέχει τα ανοικτά σύνολα άρα και τα συμπληρώματά τους, δηλαδή τα κλειστά σύνολα, συνεπώς και τη $\sigma(\mathcal{F})$. Τα διαστήματα της $\mathcal{A}_1$ είναι κλειστά, άρα $\sigma(\mathcal{F}) \supset \sigma(\mathcal{A}_1)$. Για τη $\sigma(\mathcal{A}_1) \supset \sigma(\mathcal{A}_2)$ παρατηρούμε ότι $(a, b] = (-\infty, b]\backslash(-\infty, a]$ και για τη $\sigma(\mathcal{A}_2) \supset \sigma(\mathcal{A}_3)$ ότι $(a, b) = \cup_{n=1}^{\infty}(a, b - \frac{1}{n}]$. Τέλος, για τη $\sigma(\mathcal{A}_3) \supset \mathscr{B}(\mathbb{R})$ γνωρίζουμε ότι κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ανοικτών φραγμένων διαστημάτων, άρα $\mathcal{T} \subset \sigma\mathcal{A}_3$, που δίνει το συμπέρασμα. ■

Με παρόμοια επιχειρήματα μπορεί να δείξει κανείς ότι η $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ παράγεται από την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{(-\infty, q) : q \in \mathbb{Q}\}.$$

## 1.4 Liminf και limsup ακολουθίας συνόλων

Έστω $X$ σύνολο, και $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία υποσυνόλων του. Ορίζουμε τα σύνολα

$$\liminf_{n\geq 1} A_n := \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k, \tag{1.2}$$

$$\limsup_{n\geq 1} A_n := \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k, \tag{1.3}$$

τα οποία λέμε liminf και limsup αντίστοιχα της ακολουθίας $(A_n)_{n\geq 1}$. Είναι και τα δύο υποσύνολα της ένωσης $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Με λόγια, ένα $x \in X$ ανήκει στο $\liminf A_n$ αν από ένα δείκτη και μετά ανήκει *σε όλα* τα στοιχεία της ακολουθίας $(A_n)_{n\geq 1}$, ενώ ανήκει στο $\limsup A_n$ αν ανήκει σε *άπειρα* από τα $(A_n)_{n\geq 1}$. Από τον τυπικό ορισμό ή από αυτή την περιγραφή είναι σαφές ότι $\liminf_{n\geq 1} A_n \subset \limsup_{n\geq 1} A_n$. Το να είναι ένα $x$ μέλος του $\liminf_{n\geq 1} A_n$ είναι ισχυρότερη απαίτηση και έτσι λιγότερα $x$ την ικανοποιούν.

**Παράδειγμα 1.20.** Αν $X = \mathbb{R}$ και $A_n = [-n, n]$ για κάθε $n \geq 1$, τότε $\liminf_{n\geq 1} A_n := \mathbb{R}$. Για κάθε πραγματικό αριθμό $x$ υπάρχει φυσικός $n(x)$ ώστε ο $x$ να ανήκει σε όλα τα $A_n$ με $n \geq n(x)$ (άρα αυτά τα οποία εξαιρούνται έχουν πεπερασμένο πλήθος). Κάθε $x$ έχει το δικό του $n(x)$. Μάλιστα, μπορούμε να πάρουμε $n(x) := [|x|] + 1$.

**Παράδειγμα 1.21.** Αν $X = \mathbb{R}$ και $A_n = \{x : nx \text{ είναι ακέραιος}\} = \mathbb{Z}/n$ για κάθε $n \geq 1$, τότε

$$\liminf_{n\geq 1} A_n := \mathbb{Z},$$
$$\limsup_{n\geq 1} A_n := \mathbb{Q}.$$

Σχετικά με τον δεύτερο ισχυρισμό, για κάθε ρητό $x = p/q$ με $q$ θετικό ακέραιο έχουμε ότι $x \in A_n$ για κάθε $n$ που είναι πολλαπλάσιο του $q$. Άρα έχουμε την $\supset$. Και επειδή όλα τα $A_n$ είναι υποσύνολα του $\mathbb{Q}$, έχουμε ότι και $\limsup_{n\geq 1} A_n \subset \mathbb{Q}$. Η απόδειξη του πρώτου ισχυρισμού αφήνεται στον αναγνώστη.

Αν οι όροι της ακολουθίας $(A_n)_{n\geq 1}$ είναι στοιχεία μια σ-άλγεβρας $\mathcal{A}$, τότε και τα $\liminf_{n\geq 1} A_n$, $\limsup_{n\geq 1} A_n$ είναι επίσης στοιχεία της $\mathcal{A}$. Ας το δούμε για το lim sup. Επειδή η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις, για κάθε $n \geq 1$ έχουμε $B_n := \cup_{k=n} A_k \in C$, και επειδή είναι κλειστή στις αριθμήσιμες τομές έχουμε $\limsup_{n\geq 1} A_n = \cap_{n\geq 1} B_n \in C$.

## Ασκήσεις

**1.1** Έστω $X := \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ και

$$\mathcal{A}_1 := \{\emptyset, X, \{\beta, \gamma\}\},$$
$$\mathcal{A}_2 := \{\emptyset, X, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \delta\}\}.$$

(α) Είναι οι $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ σ-άλγεβρες;
(β) Να δείξετε ότι $\sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{A}_2$.

**1.2** Σε αυτή την άσκηση παίρνουμε $X := \mathbb{R}$.
(α) Να δείξετε ότι η $\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ αριθμήσιμο ή } \mathbb{R}\setminus A \text{ αριθμήσιμο}\}$ είναι σ-άλγεβρα και $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
(β) Για την οικογένεια $\mathcal{A}_0 := \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$ να δείξετε ότι $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}$.
(γ) Να δείξετε ότι η οικογένεια $\mathcal{A}_1 := \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ πεπερασμένο ή } \mathbb{R}\setminus A \text{ πεπερασμένο}\}$ *δεν* είναι σ-άλγεβρα.

**1.3** Αν στο Παράδειγμα 1.15 η διαμέριση $C$ του $X$ έχει υπεραριθμήσιμο πλήθος στοιχείων (δηλαδή το $I$ είναι υπεραριθμήσιμο, άρα και το $X$ υπεραριθμήσιμο), να δοθεί περιγραφή της παραγόμενης σ-άλγεβρας $\sigma(C)$.

**1.4** Για την οικογένεια $C := \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{Q}\}$ να δείξετε ότι $\sigma(C) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

**1.5** Να δείξετε ότι η $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ δεν παράγεται από διαμέριση.

**1.6** Έστω $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στοιχείων μιας σ-άλγεβρας $\mathcal{A}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ακολουθία $(B_n)_{n\geq 1}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$, τα οποία είναι ξένα ανά δύο ώστε $B_n \subset A_n$ για κάθε $n \geq 1$, και $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$.

**1.7** Έστω $f : X \to Y$ συνάρτηση.
(α) Αν $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο $X$, θέτουμε

$$\mathcal{B} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}.$$

Να δείξετε ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα στο $Y$.
(β) Αν $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα στο $Y$, θέτουμε

$$\mathcal{A} := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}.$$

Να δείξετε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο $X$.

Υπενθυμίζουμε ότι για $B \subset Y$, συμβολίζουμε με $f^{-1}(B)$ το σύνολο $\{x \in X : f(x) \in B\}$. Το $f^{-1}$ εδώ δεν σημαίνει «αντίστροφη της $f$». Η $f$ δεν είναι απαραίτητο να είναι αντιστρέψιμη.

**1.8** Έστω $X$ σύνολο και $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα στο $X$. Αν ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες, τότε η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα.

(i) Για κάθε αύξουσα ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στην $\mathcal{A}$ ισχύει $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

(ii) Για κάθε φθίνουσα ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στην $\mathcal{A}$ ισχύει $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

(iii) Για κάθε ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο στοιχείων στην $\mathcal{A}$, ισχύει $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

# 2

# Μέτρα

## 2.1 Μέτρα σε μετρήσιμο χώρο

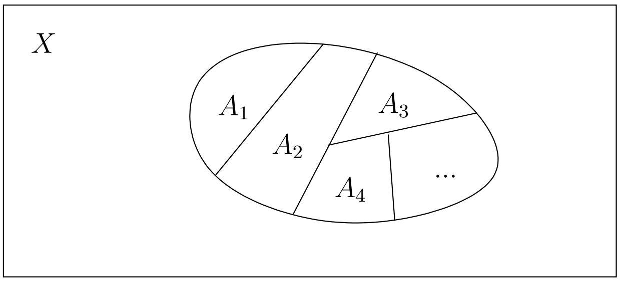
Έστω $X$ σύνολο και $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο $X$. Ονομάζουμε το ζεύγος $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμο χώρο.

**Ορισμός 2.1.** **Μέτρο** στον $(X, \mathcal{A})$ λέμε κάθε συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n\geq 1}$ ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$.

Η τριάδα $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται **χώρος μέτρου** και τα στοιχεία της $\mathcal{A}$ **μετρήσιμα σύνολα**. Η ιδιότητα (ii) του ορισμού λέγεται αριθμήσιμη προσθετικότητα.




Σχήμα 2.1: Για την ιδιοτητα (ii) του ορισμού του μέτρου.

**Παράδειγμα 2.2.** (Αριθμητικό μέτρο) Έστω $X$ ένα σύνολο, $\mathcal{A} = \mathscr{P}(X)$, και

$$\mu(A) := \begin{cases} n & \text{αν το } A \text{ είναι πεπερασμένο και έχει ακριβώς } n \text{ στοιχεία,} \\ \infty & \text{αν το } A \text{ είναι άπειροσύνολο} \end{cases}$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Το $\mu$ είναι το αριθμητικό μέτρο στο $X$.

**Παράδειγμα 2.3.** (Μέτρο Dirac) Έστω $X$ ένα σύνολο, $\mathcal{A} = \mathscr{P}(X)$, και $x_0 \in X$ ένα δεδομένο σημείο του $X$. Ορίζουμε

$$\delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 1 & \text{αν } x_0 \in A, \\ 0 & \text{αν } x_0 \in X \backslash A \end{cases}$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Η συνάρτηση $\delta_{x_0}$ είναι μέτρο και ονομάζεται μέτρο Dirac στο $x_0$.

**Παράδειγμα 2.4.** (Μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$) Παίρνουμε $X = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Είναι δυνατόν να οριστεί ένα μέτρο $\lambda$ στον χώρο $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ ώστε

$$\lambda(I) = \text{μήκος}(I), \tag{$*$}$$

για κάθε διάστημα $I \subset \mathbb{R}$. Για παράδειγμα, για $a < b$ πραγματικούς, έχουμε $\lambda((a,b)) = \lambda([a,b]) = b - a$, $\lambda((a,\infty)) = \infty$ και $\lambda([0.1,2) \cup (3,4) \cup (5,5.3)) = 1.9 + 1 + 0.3 = 3.2$.

Πώς μπορούμε να ορίσουμε μια τέτοια συνάρτηση; Ξέρουμε τις τιμές της στα διαστήματα, τα οποία είναι στοιχεία του $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, και οι ιδιότητες του μέτρου καθορίζουν μοναδικά τις τιμές της σε ενώσεις διαστημάτων. Αυτό όμως δεν αρκεί. Χρειάζεται να την επεκτείνουμε σε όλο το $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Αποδεικνύεται ότι μια τέτοια επέκταση είναι δυνατή και γίνεται μοναδικά. Δηλαδή υπάρχει μοναδικό μέτρο στο $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ που ικανοποιεί την ($*$). Την κατασκευή αυτού του μέτρου μπορεί να βρει ο αναγνώστης σε βιβλία θεωρίας μέτρου [για παράδειγμα, Κεφάλαιο 3 του Κουμουλλής Γ. και Νεγρεπόντης Σ (1991)].

Μπορεί άραγε το $\lambda$ να επεκταθεί σε όλο το $\mathscr{P}(\mathbb{R})$; Δηλαδή να αποδώσουμε σε κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έναν αριθμό που θα είναι το «μήκος» του. Αποδεικνύεται ότι το $\lambda$ μπορεί να επεκταθεί μέχρι ένα σύνολο $\mathcal{M}_\lambda$, που είναι μάλιστα σ-άλγεβρα, με $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{M}_\lambda \subsetneq \mathscr{P}(\mathbb{R})$, αλλά όχι παραπάνω. Γιατί όχι παραπάνω; Είναι τόσο δύσκολο να επεκτείνουμε μια συνάρτηση; Το δύσκολο δεν είναι να την επεκτείνουμε, αλλά να την επεκτείνουμε με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιεί την (ii) του Ορισμού 2.1. Αυτή η συνθήκη βάζει τόσες πολλές απαιτήσεις στη $\lambda$ ώστε να μην υπάρχει καμία $\lambda : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ που να μπορεί να τις ικανοποιήσει όλες.

**Παρατήρηση 2.5.** (Σύνολα με μέτρο Lebesgue 0) Κάθε μονοσύνολο $\{x\} \subset \mathbb{R}$ έχει μέτρο Lebesgue 0 αφού $\{x\} = [x,x]$ είναι ένα διάστημα με μήκος 0. Έπεται από την (ii) του Ορισμού 2.1 του μέτρου ότι κάθε αριθμήσιμο σύνολο έχει επίσης μέτρο Lebesgue 0. Έτσι, το $\mathbb{Q}$, ενώ είναι ένα πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και κατά μια έννοια «μεγάλο» σύνολο, έχει μέτρο 0. Υπάρχουν όμως και υπεραριθμήσιμα σύνολα με μέτρο 0, με πιο γνωστό παράδειγμα το σύνολο $C$ του Cantor. Αυτό γράφεται ως $C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$ όπου το $C_n$ είναι ένωση $2^n$ ξένων διαστημάτων, το καθένα με μήκος $3^{-n}$ (από τη συνήθη κατασκευή του $C$). Άρα $\lambda(C) \le \lambda(C_n) = 2^n 3^{-n} \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Την ανισότητα $\lambda(C) \le \lambda(C_n)$ θα τη δικαιολογήσουμε παρακάτω [Πρόταση 2.12 (*ii*)].

**Ορισμός 2.6.** Ένα μέτρο $\mu$ σε έναν μετρήσιμο χώρο $(X,\mathcal{A})$ λέγεται πεπερασμένο αν $\mu(X) < \infty$, και μέτρο πιθανότητας αν $\mu(X) = 1$.

Αντίστοιχα, ο χώρος μέτρου $(X,\mathcal{A},\mu)$ λέγεται χώρος πεπερασμένου μέτρου ή χώρος πιθανότητας. Για έναν χώρο πιθανότητας συνήθως χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$.

**Παράδειγμα 2.7.** (Διακριτό μέτρο πιθανότητας) Έστω $\Omega$ αριθμήσιμο σύνολο και $\mathcal{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. Έστω $f : \Omega \to [0,\infty)$ ώστε $\sum_{x\in\Omega} f(x) = 1$. Για $A \in \mathcal{F}$, ορίζουμε

$$\mathbf{P}(A) := \sum_{x\in A} f(x).$$

Η συνάρτηση $\mathbf{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας στο $\Omega$. Σε κάθε σημείο $x \in \Omega$ δίνει μάζα $f(x)$. Το διακριτό μέτρο πιθανότητας είναι γενίκευση του μέτρου Dirac. Περισσότερα από ένα σημεία παίρνουν ένα τμήμα της συνολικής μάζας 1.

**Παράδειγμα 2.8.** (Ρίψη νομίσματος) Για το πείραμα ρίψης ενός νομίσματος που έχει πιθανότητα $p \in [0,1]$ να φέρει κορώνα και $1-p$ να φέρει γράμματα, ένας φυσιολογικός χώρος πιθανότητας προκύπτει ως ειδική περίπτωση του προηγούμενου παραδείγματος. Παίρνουμε $\Omega := \{K,\Gamma\}$, $f(K) = p, f(\Gamma) = 1-p$. Προκύπτει έτσι ένα μέτρο πιθανότητας, έστω $\mathbf{P}^{(p)}$, και τελικά ο χώρος πιθανότητας είναι ο $(\{K,\Gamma\}, \mathscr{P}(\{K,\Gamma\}), \mathbf{P}^{(p)})$.

**Παράδειγμα 2.9.** (Το μοντέλο Ising) Έστω $N \ge 1$ φυσικός, $V := [-N,N]^2 \cap \mathbb{Z}^2$,

$$\Omega := \{-1,1\}^V = \{s \,|\, s : V \to \{-1,1\} \text{ συνάρτηση }\},$$

και $\mathcal{F} := \mathscr{P}(\Omega)$. Το $V$ είναι ένα πεπερασμένο πλέγμα μέσα στο $\mathbb{Z}^2$ σε σχήμα τετραγώνου. Η εικόνα που έχουμε στο μυαλό μας είναι ότι σε κάθε σημείο του $V$ υπάρχει ένα ηλεκτρόνιο του οποίου η μαγνητική ροπή παίρνει μόνο μία από τις τιμές $-1, 1$. Τα σημεία του $\Omega$ τα λέμε σχηματισμούς και κάθε σχηματισμός αναθέτει σε κάθε σημείο του πλέγματος $V$, δηλαδή σε κάθε ηλεκτρόνιο, μια από τις τιμές $-1, 1$. Γειτονικά σημεία ενός σημείου $x := (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ λέμε τα $(x_1 - 1, x_2), (x_1 + 1, x_2), (x_1, x_2 - 1), (x_1, x_2 + 1)$. Αν το $y$ είναι γειτονικό του $x$, τότε και το $x$ είναι γειτονικό του $y$, και γράφουμε $< x, y >$.

Έστω $J, h \in \mathbb{R}$ σταθερές. Για κάθε σχηματισμό $s \in \Omega$, ορίζουμε $A(s) := J \sum_{x,y \in V: <x,y>} s(x)s(y) + h \sum_{x \in V} s(x)$ και

$$f(s) = \frac{1}{Z} e^{A(s)},$$

όπου $Z := \sum_{r \in \Omega} e^{A(r)}$ είναι ο κατάλληλος αριθμός ώστε αθροιζοντας την $f$ πάνω σε όλα τα $s \in \Omega$ να παίρνουμε 1. Η συνάρτηση $f$ ορίζει, με τη διαδικασία του Παραδείγματος 2.7, ένα μέτρο πιθανότητας στον $\Omega$. Ας υποθέσουμε ότι $J > 0$ και $h = 0$. Τότε μεγαλύτερη πιθανότητα έχουν σχηματισμοί που δίνουν το ίδιο πρόσημο σε πολλά γειτονικά σημεία.

Αυτό το μέτρο πιθανότητας καθώς και γενικεύσεις του έχουν χρησιμοποιηθεί για την κατανόηση των μαγνητικών ιδιοτήτων της ύλης.

**Παράδειγμα 2.10.** (Μέτρο περιορισμός) Αν $\mu$ είναι ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ και $A_0 \in \mathcal{A}$, τότε η συνάρτηση $\mu_{A_0} : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ που ορίζεται ως $\mu_{A_0}(A) = \mu(A \cap A_0)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ είναι μέτρο (Άσκηση). Το $\mu_{A_0}$ έχει συγκεντρωμένη όλη του τη μάζα στο $A_0$ αφού $\mu_{A_0}(X \backslash A_0) = \mu((X \backslash A_0) \cap A_0) = \mu(\emptyset) = 0$.

**Παράδειγμα 2.11.** (Κανονικοποιημένο μέτρο περιορισμός) Σε συνέχεια του προηγούμενου παραδείγματος. Ας υποθέσουμε ότι το $\mu$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας και ότι $0 < \mu(A_0) < 1$, τότε το $\mu_{A_0}$ έχει συνολική μάζα $\mu_{A_0}(\Omega) = \mu(A_0) < 1$, δηλαδή δεν είναι μέτρο πιθανότητας. Το κανονικοποιούμε ορίζοντας ένα νέο μέτρο, το $\mathbf{P}_{A_0} : \mathcal{A} \to [0, 1]$, ως εξής

$$\mathbf{P}_{A_0}(A) = \frac{\mu_{A_0}(A)}{\mu_{A_0}(\Omega)} = \frac{\mu(A \cap A_0)}{\mu(A_0)}$$

για κάθε $A \in \mathcal{F}$. Το $\mathbf{P}_{A_0}$ είναι μέτρο πιθανότητας, και δίνει όλη του την μάζα στο σύνολο $A_0$.

Τα αξιώματα στον ορισμό του μέτρου συνεπάγονται αρκετές ιδιότητες για μια τέτοια συνάρτηση. Καταγράφουμε στην παρακάτω πρόταση κάποιες που στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε επανηλειμμένα.

**Πρόταση 2.12.** *Έστω $\mu$ ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$. Τότε,*

*(i)* $\mu(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$ *για κάθε $n \geq 1$ και $\{A_n : 1 \leq k \leq n\}$ ξένα ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{A}$.*

*(ii) Αν $A, B \in \mathcal{A}$, με $A \subset B$, τότε $\mu(A) \leq \mu(B)$ και αν $\mu(A) < \infty$, τότε $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

*(iii)* $\mu(\cup_{n=1}^\infty A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ *για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n \geq 1}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$.*

*(iv) Αν $(A_n)_{n \geq 1}$ είναι αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$, τότε $\mu(\cup_{n=1}^\infty A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$.*

*(v) Αν $(A_n)_{n \geq 1}$ είναι φθίνουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ με $\mu(A_1) < \infty$, τότε $\mu(\cap_{n=1}^\infty A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$.*

*Απόδειξη.* (i) Τα σύνολα της ακολουθίας $(B_k)_{k \geq 1}$ με

$$B_k := \begin{cases} A_k & \text{αν } k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \\ \emptyset & \text{αν } k \in \mathbb{N}, k \geq n + 1. \end{cases}$$

είναι στοιχεία της $\mathcal{A}$ ξένα ανά δύο. Οπότε η ιδιότητα (ii) του ορισμού του μέτρου δίνει

$$\mu(\cup_{k=1}^n A_k) = \mu(\cup_{k=1}^\infty B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

αφού $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Το $B$ είναι η ένωση των ξένων συνόλων $A, B\setminus A$, οπότε με βάση το (i) της πρότασης,

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B\setminus A)) = \mu(A) + \mu(B\setminus A).$$

Επειδή $\mu(B\setminus A) \geq 0$, έπεται ότι $\mu(B) \geq \mu(A)$. Τώρα, όταν $\mu(A) < \infty$, το αφαιρούμε από την πιο πάνω ισότητα, και παίρνουμε ότι $\mu(B\setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(iii) Έστω $B_1 := A_1$ και $B_k := A_k\setminus(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{k-1})$ για κάθε $k \geq 2$. Τα $\{B_k : k \geq 1\}$ είναι ξένα ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{A}$, $B_n \subset A_n$ για κάθε $n \geq 1$, και $\cup_{k=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Άρα

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί τα $(B_n)_{n\geq 1}$ είναι ξένα ανά δύο, και η ανισότητα λόγω της $B_n \subset A_n$ και του μέρους (ii) της πρότασης.

(iv) Έστω $B_1 := A_1$ και $B_k := A_k\setminus A_{k-1}$ για κάθε $k \geq 2$. Τα $\{B_k : k \geq 1\}$ είναι ξένα ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{A}$, $\cup_{k=1}^{n} B_n = A_n$, και $\cup_{k=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Έτσι,

$$\mu(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \mu(\cup_{k=1}^{\infty} B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{k=1}^{n} B_k) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(v) Θέτουμε $B_n = A_1\setminus A_n$ για κάθε $n \geq 1$. Για την ακολουθία $(B_n)_{n\geq 1}$ εφαρμόζεται το προηγούμενο μέρος της πρότασης και δίνει $\lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus \cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1\setminus A_n)$. Έπειτα, το ότι $\mu(A_1) < \infty$ δίνει $\mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$ και $\mu(A_n) < \infty$ για κάθε $n \geq 1$, οπότε χρησιμοποιώντας και το μέρος (i) της πρότασης παίρνουμε το ζητούμενο. ■

**Ορολογία**: Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος ώστε ο $X$ να είναι μετρικός χώρος και η σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ να περιέχει τα σύνολα Borel του $X$, δηλαδή $\mathscr{B}(X) \subset \mathcal{A}$. Αν $\mu$ είναι ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$, **στήριγμα** (ή και φορέα) του $\mu$ λέμε το σύνολο

$$\operatorname{supp}\mu := \{x \in X : \mu(U) > 0 \text{ για κάθε ανοιχτό υποσύνολο του } X \text{ με } x \in U\}.$$

Σε γενικές γραμμές, το στήριγμα είναι το μικρότερο υποσύνολο του $X$ στο οποίο το $\mu$ συγκεντρώνει τη μάζα του. Είναι ένα κλειστό σύνολο και, αν ο $X$ είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, μπορούμε να το βρούμε αν αφαιρέσουμε από τον $X$ όλα τα ανοιχτά υποσύνολα του με $\mu$-μέτρο 0.

**Παράδειγμα 2.13.** (i) Έστω $\lambda > 0$ και $\mu_1$ το διακριτό μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ που δίνει μάζα $e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ στον μη αρνητικό ακέραιο $k$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$. Το στήριγμά του είναι το $\mathbb{N}$.

(ii) Έστω $\mu_2$ το μέτρο στο $\mathbb{R}$ με $\mu_2(A) = |A \cap \mathbb{Q}|$ για κάθε $A \subset \mathbb{R}$. Αυτό είναι ένα διακριτό μέτρο (δίνει μάζα 1 σε κάθε ρητό). Παρόλο που $\mu_2(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = 0$ (δηλαδή η μάζα του $\mu_2$ είναι συγκεντρωμένη στο $\mathbb{Q}$), το στήριγμα του $\mu_2$ είναι το $\mathbb{R}$ γιατί οποιοδήποτε ανοιχτό σύνολο γύρω από οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό έχει θετικό μέτρο αφού περιέχει κάποιον ρητό.

## Ασκήσεις

**2.1** Έστω $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$, $n \in \mathbb{N}^+$, μέτρα πιθανότητας στον $(\Omega, \mathcal{F})$ και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ με $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Να δειχθεί ότι ο κυρτός συνδυασμός

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{P}_i$$

των μέτρων $\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, είναι μέτρο στον $(\Omega, \mathcal{F})$.

**2.2** Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας, και $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{F}$. Να δείξετε ότι $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = 0$.

**2.3** Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{F}$.

(α) Αν $\mathbf{P}(A_n) = 0$ για κάθε $n \geq 1$, τότε $\mathbf{P}\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$.

(β) Αν $\mathbf{P}(A_n) = 1$ για κάθε $n \geq 1$, τότε $\mathbf{P}\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$.

**2.4** Να βρεθεί χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και $(A_i)_{i\in I}, (B_i)_{i\in I'}$ οικογένειες στοιχείων της $\mathcal{F}$ ώστε

(α) $\mathbf{P}(A_i) = 0$ για κάθε $i \in I$, $\cup_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}$, αλλά $\mathbf{P}\left(\cup_{i\in I} A_i\right) \neq 0$.

(β) $\mathbf{P}(B_i) = 1$ για κάθε $i \in I'$, αλλά $\cap_{i\in I'} B_i = \emptyset$.

**2.5** Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(A_\beta)_{\beta\in B}$ οικογένεια ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{F}$. Αν $\mathbf{P}(A_\beta) > 0$ για κάθε $\beta \in B$, να δείξετε ότι το $B$ είναι αριθμήσιμο.

**2.6** Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{F}$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{P}(\liminf_{n\geq 1} A_n) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) \leq \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) \leq \mathbf{P}(\limsup_{n\geq 1} A_n). \tag{2.1}$$

**2.7** Έστω $\mu_1$ το μέτρο στο Παράδειγμα 2.13(i), $\lambda$ το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$, και $\nu$ ο περιορισμός του στο $(2, 5)$ (δες Παράδειγμα 2.10). Θέτουμε $\mu = \mu_1 + \nu$. Ποιο είναι το $\mathrm{supp}(\mu)$;

**2.8** Έστω $F \subset \mathbb{R}$ κλειστό. Να δειχθεί ότι υπάρχει μέτρο στο $\mathbb{R}$ με στήριγμα το $F$.

# 3

# Ισότητα πεπερασμένων μέτρων

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε ένα τεχνικό αποτέλεσμα, το λεγόμενο Θεώρημα π-λ, που στόχο έχει να διευκολύνει την απόδειξη ιδιοτήτων για τα στοιχεία μιας σ-άλγεβρας.

## 3.1 Κλάσεις Dynkin

**Ορισμός 3.1.** Έστω $X$ σύνολο. Μια οικογένεια $\mathcal{D} \subset \mathscr{P}(X)$ λέγεται κλάση **Dynkin** στο $X$ αν έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $X \in \mathcal{D}$.

(ii) Αν $A, B \in \mathcal{D}$ και $A \subset B$, τότε $B \setminus A \in \mathcal{D}$.

(iii) Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία στην $\mathcal{D}$, τότε $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

**Παρατήρηση 3.2.** Κάθε σ-άλγεβρα είναι κλάση Dynkin. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει (Άσκηση 3.2). Δηλαδή είναι ευκολότερο ένα σύνολο να είναι κλάση Dynkin.

Όπως και στην περίπτωση των σ-αλγεβρών, για κάθε οικογένεια $C \subset \mathscr{P}(X)$ ενός συνόλου $X$, υπάρχει η ελάχιστη κλάση Dynkin που την περιέχει. Αυτή περιγράφεται ως η τομή όλων των κλάσεων Dynkin που περιέχουν τη $C$. Συνήθως τη συμβολίζουμε με $\delta(C)$. Συνοψίζοντας παίρνουμε την ακόλουθη πρόταση η απόδειξη της οποίας είναι παρόμοια με αυτή στην περίπτωση των σ-αλγεβρών.

**Πρόταση 3.3.** *Έστω $X$ σύνολο και $C \subset \mathscr{P}(X)$. Θέτουμε $\mathcal{J} := \{\mathcal{D} \subset \mathscr{P}(X) : \mathcal{D}$ είναι κλάση Dynkin και $C \subset \mathcal{D}\}$. Τότε η οικογένεια*

$$\delta(C) := \cap_{\mathcal{D}\in\mathcal{J}} \mathcal{D}$$

- *είναι κλάση Dynkin στο $X$ και*
- *είναι η μικρότερη κλάση Dynkin που περιέχει τη $C$. Δηλαδή περιέχεται σε κάθε κλάση Dynkin που περιέχει τη $C$.*

Ονομάζουμε τη $\delta(C)$ κλάση Dynkin που παράγεται από την $C$.

**Παρατήρηση 3.4.** Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι $\delta(C) \subset \sigma(C)$ εφόσον η $\sigma(C)$ είναι κλάση Dynkin και περιέχει τη $C$.

Λέμε ότι μια οικογένεια $C$ συνόλων είναι *κλειστή στις πεπερασμένες τομές* αν για κάθε $n \geq 1$ και $A_1, A_2, \ldots, A_n \in C$ ισχύει ότι $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in C$. Προφανώς αρκεί να ισχύει η συνθήκη αυτή για $n = 2$ και έπειτα οι υπόλοιπες περιπτώσεις αποδεικνύονται επαγωγικά.

Η επόμενη πρόταση δίνει μια απλή συνθήκη ώστε μια κλάση Dynkin να είναι σ-άλγεβρα.

**Πρόταση 3.5.** *Έστω $X$ σύνολο και $\mathcal{D}$ κλάση Dynkin στο $X$. Αν η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, τότε η $\mathcal{D}$ είναι σ-άλγεβρα στο $X$.*

*Απόδειξη.* Από τον Ορισμό 3.1 της κλάσης Dynkin έχουμε ότι $X \in \mathcal{D}$ λόγω του (i) και, αν $A \in \mathcal{D}$, τότε $X \setminus A \in \mathcal{D}$ λόγω των (i) και (ii). Επίσης, η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες ενώσεις εφόσον είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές και στα συμπληρώματα. Άρα είναι άλγεβρα. Αυτό, σε συνδυασμό με την ιδιότητα (iii) του Ορισμού 3.1 και την Άσκηση 1.8, μας εξασφαλίζει ότι η $\mathcal{D}$ είναι σ-άλγεβρα. ■

### 3.2 Το Θεώρημα π-λ

**Θεώρημα 3.6** (Θεώρημα π-λ)**.** *Έστω $X$ σύνολο και $C \subset \mathscr{P}(X)$ οικογένεια κλειστή στις πεπερασμένες τομές. Τότε $\delta(C) = \sigma(C)$.*

*Απόδειξη.* Ισχύει ότι $\delta(C) \subset \sigma(C)$. Άρα, αν δείξουμε ότι η $\delta(C)$ είναι σ-άλγεβρα, τότε $\sigma(C) \subset \delta(C)$, εφόσον η $\sigma(C)$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει τη $C$. Με βάση την Πρόταση 3.5, αρκεί να δείξουμε ότι η $\delta(C)$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, δηλαδή

$$A, B \in \delta(C) \Rightarrow A \cap B \in \delta(C). \tag{3.1}$$

Γνωρίζουμε το συμπέρασμα της συνεπαγωγής για $A, B \in C$, οπότε το σχέδιο είναι να την ενισχύσουμε σε δύο βήματα. Δηλαδή να δείξουμε ότι ισχύει πρώτα για $A \in C, B \in \delta(C)$ και έπειτα για $A \in \delta(C), B \in \delta(C)$.

Για κάθε $A \subset X$ θέτουμε

$$\mathcal{D}(A) = \{U \in \delta(C) : A \cap U \in \delta(C)\}.$$

Αυτό το σύνολο περιέχει τα σύνολα που «τέμνονται ωραία» με το $A$.

**Βήμα 1**. Για $A \in C$, έχουμε

- $C \subset \mathcal{D}(A)$ εφόσον η $C$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές.
- Η $\mathcal{D}(A)$ είναι κλάση Dynkin (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση).

Άρα $\mathcal{D}(A) \supset \delta(C)$, εφόσον η $\delta(C)$ είναι η ελάχιστη κλάση Dynkin που περιέχει τη $C$. Όμως $\mathcal{D}(A) \subset \delta(C)$ από τον ορισμό της $\mathcal{D}(A)$. Τελικά $\mathcal{D}(A) = \delta(C)$, που σημαίνει ότι

$$A \in C, B \in \delta(C) \Rightarrow A \cap B \in \delta(C). \tag{3.2}$$

**Βήμα 2**. Για $B \in \delta(C)$, έχουμε

- $C \subset \mathcal{D}(B)$ από την (3.2).
- Η $\mathcal{D}(B)$ είναι κλάση Dynkin (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση).

Άρα, όπως στο Βήμα 1, έχουμε ότι $\mathcal{D}(B) = \delta(C)$, δηλαδή ισχύει η (3.1), και το θεώρημα αποδείχθηκε. ∎

Μια οικογένεια $C \subset \mathscr{P}(X)$ λέγεται π-σύστημα αν είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές, ενώ λέγεται λ-σύστημα αν είναι κλάση Dynkin. Σε αυτή την ορολογία οφείλεται το όνομα του προηγούμενου θεωρήματος. Μια ισοδύναμη διατύπωσή του δίνεται στην Άσκηση 3.3.

Χαρακτηριστική εφαρμογή του θεωρήματος είναι η εξής: Για $X = \mathbb{R}$, η οικογένεια $C = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές και άρα $\delta(C) = \sigma(C)$. Ξέρουμε όμως ότι $\sigma(C) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Άρα παίρνουμε ακόμα μία περιγραφή των συνόλων Borel ως $\delta(C)$.

Μια σημαντική συνέπεια του θεωρήματος π-λ είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Πόρισμα 3.7.** *Έστω $X$ σύνολο, $\mathcal{A} \subset \mathscr{P}(X)$, σ-άλγεβρα, και $\mu, \nu$ πεπερασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$, με $\mu(X) = \nu(X)$, τα οποία συμφωνούν σε μια οικογένεια $C \subset \mathcal{A}$ κλειστή στις πεπερασμένες τομές. Αν $\sigma(C) = \mathcal{A}$, τότε $\mu = \nu$ στην $\mathcal{A}$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$. Τότε,

- $C \subset \mathcal{B} \subset \sigma(C)$.
- Η $\mathcal{B}$ είναι κλάση Dynkin.

Πράγματι, ο πρώτος ισχυρισμός είναι προφανής και για το δεύτερο έχουμε,

(i) $X \in \mathcal{B}$ από υπόθεση.

(ii) Αν $A, B \in \mathcal{B}$, $A \subset B$, τότε $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) = \nu(B \setminus A)$.

(iii) Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία στη $\mathcal{B}$, τότε

$$\mu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \nu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

Άρα $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$.

Εφόσον η $\mathcal{B}$ είναι κλάση Dynkin, έχουμε ότι $\delta(C) \subset \mathcal{B}$. Όμως, από το θεώρημα μονότονης κλάσης, $\delta(C) = \sigma(C)$, και τελικά $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο. ■

Το προηγούμενο πόρισμα δίνει ότι αν έχουμε δύο μέτρα πιθανότητας $\mu, \nu$ στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ για τα οποία ισχύει $\mu((-\infty, x]) = \nu((-\infty, x])$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $\mu = \nu$.

## Ασκήσεις

**3.1** Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $U \in \mathcal{A}$ δεδομένο. Θέτουμε

$$C := \{A \in \mathcal{A} : \mathbf{P}(A \cap U) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(U)\}.$$

Να δειχθεί ότι η $C$ είναι κλάση Dynkin.

**3.2** Έστω $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$ και

$$\mathcal{A} := \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \emptyset\}.$$

Να δειχθεί ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλάση Dynkin αλλά δεν είναι σ-άλγεβρα στο $\Omega$.

**3.3** Έστω $X$ σύνολο, $C_1 \subset C_2 \subset \mathscr{P}(X)$ ώστε η $C_1$ να είναι κλειστή στις πεπερασμένες τομές και η $C_2$ να είναι κλάση Dynkin. Να δειχθεί ότι $\sigma(C_1) \subset C_2$.

# 4

# Περιγραφή μέτρων πιθανότητας

## 4.1 Μέτρα πιθανότητας σε αριθμήσιμο δειγματικό χώρο

Στην παράγραφο αυτή θα μιλήσουμε για μέτρα πιθανότητας σε αριθμήσιμο δειγματικό χώρο, που αποτελούν την απλούστερη μορφή μέτρων πιθανότητας και δεν απαιτούν χρήση εξειδικευμένων εργαλείων.

Αν $\Omega$ αριθμήσιμο σύνολο, στο Παράδειγμα 2.7 είδαμε πώς μπορούμε να ορίσουμε ένα τέτοιο μέτρο με τη χρήση μιας κατάλληλης συνάρτησης $f : \Omega \to [0, \infty)$. Η σ-άλγεβρα που επιλέξαμε ήταν η $\mathcal{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. Αυτό προκύπτει φυσιολογικά δεδομένου ότι ζητάμε $\{\omega\} \in \mathcal{A}$ για κάθε $\omega \in \Omega$, συνεπώς αναγκαστικά $\mathcal{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ εφόσον κάθε $A \subset \Omega$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση στοιχείων της $\mathcal{F}$, δηλαδή $A = \cup_{\omega \in A}\{\omega\}$.

**Θεώρημα 4.1.** *Έστω $\Omega$ αριθμήσιμο σύνολο και $\mathcal{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. Τότε*

*(i) Ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον $(\Omega, \mathcal{F})$ καθορίζεται πλήρως από τις τιμές $p_\omega = \mathbf{P}(\{\omega\})$, $\omega \in \Omega$.*

*(ii) Έστω $(q_\omega)_{\omega \in \Omega}$ ακολουθία αριθμών στο $\mathbb{R}$.*
*Υπάρχει μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον $(\Omega, \mathcal{F})$ με $\mathbf{P}(\{\omega\}) = q_\omega$, για κάθε $\omega \in \Omega$ αν και μόνο αν $q_\omega \geq 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και $\sum_{\omega \in \Omega} q_\omega = 1$.*

*Απόδειξη.* $(i)$ Έστω $A \subset \Omega$. Τότε $A = \cup_{\omega \in A}\{\omega\}$, και εφόσον το $\Omega$ είναι αριθμήσιμο,

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

$(ii)$ $\Rightarrow$ Ισχύει ότι $q_\omega = \mathbf{P}(\{\omega\})$, άρα $q_\omega \geq 0$ εφόσον $\mathbf{P}$ μέτρο στο $\Omega$. Επίσης,

$$\sum_{\omega \in \Omega} q_\omega = \sum_{\omega \in \omega} \mathbf{P}(\{\omega\}) = \mathbf{P}(\cup_{\omega \in \Omega}\{\omega\}) = \mathbf{P}(\Omega) = 1,$$

εφόσον $\mathbf{P}$ μέτρο πιθανότητας στο $\Omega$.
$\Leftarrow$ Προκύπτει από το Παράδειγμα 2.7.

■

**Παράδειγμα 4.2.** (Κατανομή Poisson) Έστω $\Omega = \mathbb{N}$ και $\lambda > 0$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έστω $p_k = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. Η $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ικανοποιεί της απαιτήσεις του Θεωρήματος 4.1. Πράγματι, $p_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = 1$. Συνεπώς ορίζεται μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ έτσι ώστε $\mathbf{P}(\{k\}) = p_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Το μέτρο αυτό λέγεται κατανομή **Poisson**.

**Ορισμός 4.3.** Έστω $\Omega$ πεπερασμένο σύνολο. Ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ λέγεται ομοιόμορφο αν υπάρχει $c > 0$ έτσι ώστε $\mathbf{P}(\{\omega\}) = c$ για κάθε $\omega \in \Omega$, δηλαδή το $\mathbf{P}$ δίνει την ίδια μάζα σε κάθε $\omega \in \Omega$.

Από τον Ορισμό 4.3 συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \text{για κάθε } A \subset \Omega.$$

Πράγματι, εφόσον το $\mathbf{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας,

$$1 = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbf{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\Omega} c = c|\Omega|.$$

Άρα $c = 1/|\Omega|$. Όμως $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbf{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} c = c|A|$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

Τα ομοιόμορφα μέτρα μοντελοποιούν πειράματα που έχουν «ισοπίθανα» αποτελέσματα.

**Παράδειγμα 4.4.** Θεωρούμε το πείραμα ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού. Τότε $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $\mathcal{A} = \mathscr{P}(\Omega)$. Το κατάλληλο μέτρο που μοντελοποιεί το πείραμα είναι το $\mathbf{P}$ με $\mathbf{P}(\{\omega\}) = 1/6$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Δηλαδή το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στον $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

**Παράδειγμα 4.5.** (Υπεργεωμετρική κατανομή) Μια κάλπη περιέχει N άσπρα και M μαύρα αριθμημένα σφαιρίδια, $(1, 2, \ldots, N)$ και $(N + 1, N + 2, \ldots, N + M)$ αντίστοιχα. Επιλέγουμε $n$ από αυτά χωρίς επανάθεση, όπου $1 \leq n \leq N + M$. Τότε ο δειγματικός μας χώρος είναι

$$\Omega = \{A \subset \{1, 2, \ldots, N + M\} : |A| = n\},$$

και κάθε στοιχείο του $\Omega$ είναι μια δυνατή εξαγωγή. Για τον πληθάριθμο του $\Omega$ έχουμε

$$|\Omega| = \binom{N+M}{n}.$$

Για λόγους συμμετρίας, όλα τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.

Το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ που ορίζεται στον $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ έχει $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{\binom{N+M}{n}}$ για κάθε $A \subset \Omega$. Έστω τώρα $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ και $D = \{A \subset \Omega : A \text{ έχει } k \text{ άσπρα σφαιρίδια}\}$. Τότε

$$\mathbf{P}(D) = \frac{|D|}{\binom{N+M}{n}} = \frac{\binom{N}{k}\binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}.$$

## 4.2 Περιγραφή μέτρων πιθανότητας στο $\mathbb{R}$

Στην παράγραφο αυτή θα μιλήσουμε για μέτρα πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Αυτά τα μέτρα τα λέμε και *κατανομές* στο $\mathbb{R}$.

**Ορισμός 4.6.** Έστω $\mathbf{P}$ μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. **Συνάρτηση κατανομής** του $\mathbf{P}$ λέγεται η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ με

$$F(x) = \mathbf{P}\left((-\infty, x]\right) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή, η $F(x)$ μετράει τη μάζα που δίνει το μέτρο στην ημιευθεία $(-\infty, x]$.

**Παράδειγμα 4.7.** Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\delta_{x_0}$ το μέτρο Dirac στην $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ στο $x_0$. Η συνάρτηση κατανομής του $\delta_{x_0}$ είναι η

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < x_0, \\ 1 & \text{αν } x \geq x_0. \end{cases}$$

Παρακάτω, χρησιμοποιούνται οι εξής συμβολισμοί: Για $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$F(x_0-) = \lim_{x\to x_0^-} F(x),\ \ F(x_0+) = \lim_{x\to x_0^+} F(x),$$
$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x),\ \ F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x).$$

**Πρόταση 4.8.** *Έστω* $\mathbf{P}$ *μέτρο πιθανότητας στον* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ *και* $F$ *η συνάρτηση κατανομής του* $\mathbf{P}$. *Τότε:*

*(i) Η* $F$ *είναι αύξουσα συνάρτηση.*

*(ii) Η* $F$ *είναι δεξιά συνεχής.*

*(iii)* $F(-\infty) = 0$ *και* $F(\infty) = 1$.

*Απόδειξη.* $(i)$ Έστω $x \le y$. Τότε,

$$F(y) - F(x) = \mathbf{P}\left((-\infty, y]\right) - \mathbf{P}\left((-\infty, x]\right) = \mathbf{P}\left((-\infty, y] \setminus (-\infty, x]\right) = \mathbf{P}\left((x, y]\right) \ge 0.$$

$(ii)$ Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Επειδή $F$ αύξουσα, το $\lim_{x\to x_0^+} F(x)$ υπάρχει, και έχουμε

$$\begin{aligned} F(x_0+) &= \lim_{n\to\infty} F\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left(-\infty, x_0 + \frac{1}{n}\right]\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+}\left(-\infty, x_0 + \frac{1}{n}\right]\right) \\ &= \mathbf{P}\left((-\infty, x_0]\right) = F(x_0). \end{aligned}$$

$(iii)$ Επειδή η $F$ είναι αύξουσα, τα όρια υπάρχουν και

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(-n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left((-\infty, -n]\right) = \mathbf{P}\Big(\cap_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, -n]\Big) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0,$$

ενώ

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}((-\infty, n]) = \mathbf{P}\Big(\cup_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, n]\Big) = \mathbf{P}(\mathbb{R}) = 1.$$

∎

Η απόδειξη του $(i)$ του προηγούμενου θεωρήματος εμπεριέχει το αποτέλεσμα

$$\mathbf{P}((x, y]) = F(y) - F(x) \tag{4.1}$$

για κάθε πραγματικούς αριθμούς $x \le y$. Το ίδιο ισχύει για κάθε $-\infty \le x \le y \le \infty$ με τις συμβάσεις $(x, \infty] = (x, \infty)$ και $(x, x] = \emptyset$. Χρήσιμη επίσης είναι η σχέση (Άσκηση 4.3)

$$\mathbf{P}(\{x\}) = F(x) - F(x-) \tag{4.2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**Παράδειγμα 4.9** (Διακριτό μέτρο πιθανότητας)**.** Έστω $S \subset \mathbb{R}$ αριθμήσιμο και $(a_t)_{t\in S}$ ακολουθία θετικών αριθμών έτσι ώστε $\sum_{t\in S} a_t = 1$ (για παράδειγμα $S = \mathbb{N}, a_k = 1/2^k$ για $k \in \mathbb{N}$). Ορίζουμε

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{t\in A} a_t.$$

Το $\mathbf{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας στην $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ (Άσκηση). Για τη συνάρτηση κατανομής, $F$, του $\mathbf{P}$ έχουμε

$$F(x) = \sum_{t\le x} a_t$$

και από την Άσκηση 4.3(α),

$$F(x) - F(x-) = \mathbf{P}(\{x\}) = \begin{cases} a_x & \text{αν } x \in S, \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus S. \end{cases}$$

Δηλαδή, η $F$ είναι ασυνεχής ακριβώς στα σημεία του $S$.

Η σημαντικότητα της συνάρτησης κατανομής πηγάζει από το επόμενο θεώρημα, το οποίο λέει ότι η $F$ κωδικοποιεί πλήρως ένα μέτρο. Κρατώντας την $F$ αντί του $\mathbf{P}$, καμία πληροφορία δεν έχει χαθεί.

**Θεώρημα 4.10.** *Έστω $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ μέτρα πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ με την ίδια συνάρτηση κατανομής. Τότε $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$.*

Η απόδειξη του δόθηκε αμέσως μετά το Πόρισμα 3.7.

**Παρατήρηση 4.11.** Αν ξέρουμε τη συνάρτηση κατανομής $F$ ενός μέτρου πιθανότητας $\mathbf{P}$, τότε γνωρίζουμε τις τιμές του σε σύνολα που προκύπτουν από διαστήματα της μορφής $(x, y]$ με συνήθεις συνολοθεωρητικές πράξεις χρησιμοποιώντας την (4.1) και τις σχέσεις της Άσκησης 4.3.

Ποιες συναρτήσεις $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ προκύπτουν ως συναρτήσεις κατανομής μέτρων πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$; Η απάντηση δίνεται στο επόμενο θεώρημα.

**Θεώρημα 4.12.** *Μια συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση κατανομής ενός μέτρου πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ αν και μόνο αν ισχύουν τα (i)-(iii) της Πρότασης 4.8.*

*Απόδειξη.* Την συνεπαγωγή $\Rightarrow$ την είδαμε στην Πρόταση 4.8. Την συνεπαγωγή $\Leftarrow$ θα την αποδείξουμε στην Παράγραφο 7.5. ∎

Το θεώρημα αυτό μας επιτρέπει να δείξουμε την ύπαρξη μέτρων ορίζοντας μόνο τη συνάρτηση κατανομής τους. Δεν είναι απαραίτητο να ορίσουμε την τιμή τους σε κάθε υποσύνολο Borel του $\mathbb{R}$. Ένα τέτοιο παράδειγμα θα δούμε αμέσως τώρα και ένα ακόμα στην Άσκηση 7.9.

**Παράδειγμα 4.13** (Μέτρο πιθανότητας από πυκνότητα)**.** Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ώστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ να ορίζεται και να ισούται με 1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ με

$$F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για την $F$ εφαρμόζεται το Θεώρημα 4.12 (μάλιστα, η $F$ είναι συνεχής), άρα υπάρχει μέτρο πιθανότητας που έχει συνάρτηση κατανομής την $F$. Για $A \subset \mathbb{R}$ που είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο διαστημάτων μπορούμε να δούμε ότι ισχύει

$$\mathbf{P}(A) = \int_A f(x)\,dx.$$

Η $f$ λέγεται *πυκνότητα* του $\mathbf{P}$. Για συγκεκριμένες επιλογές της συνάρτησης $f$ παίρνουμε γνωστές κατανομές. Π. χ. για $f(x) := e^{-x}\mathbf{1}_{x>0}$, παίρνουμε την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1.

**Παρατήρηση 4.14.** Δεν προκύπτουν όλα τα μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ από πυκνότητες. Στα Παραδείγματα 4.7 και 4.9 οι συναρτήσεις κατανομής των δύο μέτρων έχουν σημεία ασυνέχειας. Δες Παράγραφο 7.4 για περισσότερα.

## Ασκήσεις

**4.1** Έστω $\mathbf{P}$ μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και $F$ η συνάρτηση κατανομής του $\mathbf{P}$. Να δείξετε ότι η $F$ μπορεί να έχει το πολύ αριθμήσιμο πλήθος αλμάτων.

**4.2** Έστω $\mathbf{P}_1$ κατανομή στο $\mathbb{R}$, με πυκνότητα $f(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{x>0}$, και $\mathbf{P}_2$ κατανομή στο $\mathbb{R}$ που δίνει μάζα $\frac{1}{2}$ στα $-2, 3$. Για $\lambda \in (0, 1)$ και, θεωρώντας τον κυρτό συνδυασμό $\mathbf{P} = \lambda\,\mathbf{P}_1 + (1-\lambda)\,\mathbf{P}_2$ των $\mathbf{P}_1$ και $\mathbf{P}_2$, να υπολογιστούν

(α) η $\mathbf{P}((0, 4))$,

(β) η συνάρτηση κατανομής του $\mathbf{P}$.

**4.3** Έστω $F$ συνάρτηση κατανομής ενός μέτρου $\mathbf{P}$ στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Για $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$ να δειχθεί ότι:

(α) $\mathbf{P}(\{x\}) = F(x) - F(x-)$.

(β) $\mathbf{P}([x, y]) = F(y) - F(x-)$.

(γ) $\mathbf{P}([x, y)) = F(y-) - F(x-)$.

(δ) $\mathbf{P}((x, y)) = F(y-) - F(x)$.

# 5

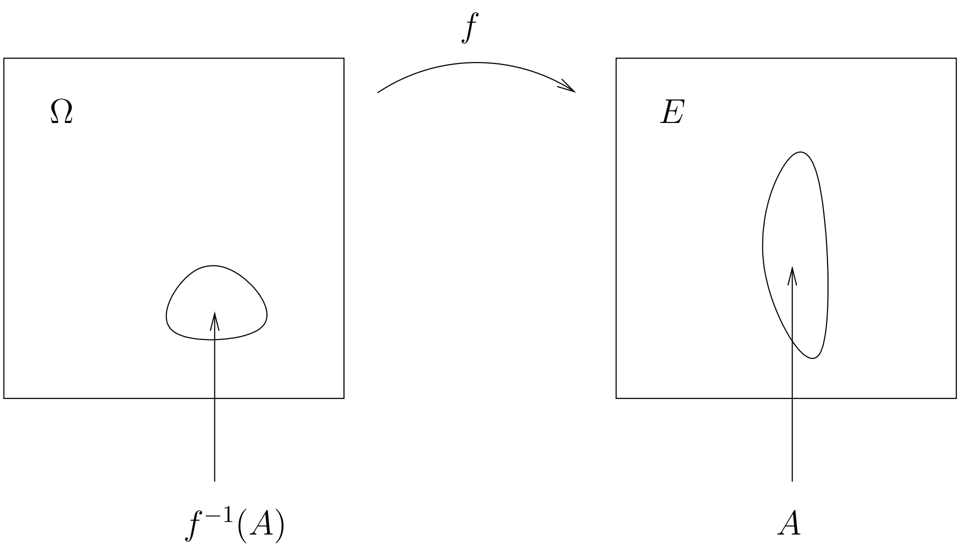
# Μετρήσιμες συναρτήσεις

## 5.1 Μετρήσιμες συναρτήσεις

**Ορισμός 5.1.** Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$, $(E, \mathcal{E})$ μετρήσιμοι χώροι. Μια συνάρτηση $f : \Omega \to E$ λέγεται $\mathcal{F}/\mathcal{E}$-**μετρήσιμη** αν

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{F} \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{E}. \tag{5.1}$$

Συμβολίζουμε το σύνολο $\{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}\}$ με $f^{-1}(\mathcal{E})$. Οπότε η απαίτηση του ορισμού της μετρησιμότητας γράφεται $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$.




Σχήμα 5.1: Μια $f$ όπως στον Ορισμό 5.1

**Ορολογία**: 1. Μια $\mathcal{F}/\mathcal{E}$-μετρήσιμη συνάρτηση τη λέμε $\mathcal{F}$-μετρήσιμη ή $\mathcal{E}$-μετρήσιμη ή απλώς μετρήσιμη αν είναι σαφές ποια είναι η σ-άλγεβρα που δεν αναφέρουμε.

2. Όταν ο χώρος $\Omega$ ή/και ο $E$ είναι μετρικός χώρος (π.χ. υποσύνολο ενός από τους χώρους $\mathbb{R}^d$, $[-\infty, \infty]$, $[0, \infty]$, $\mathbb{C}$), εκτός αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό, θα θεωρείται ότι η σ-άλγεβρα στον $\Omega$ και στον $E$ είναι η σ-άλγεβρα των υποσυνόλων Borel του $\Omega$ και του $E$. Και τότε, π.χ., $\mathcal{F}$-μετρήσιμη σημαίνει $\mathcal{F}/\mathscr{B}(E)$ μετρήσιμη. Στην περίπτωση που ο $\Omega$ (αντίστοιχα, ο $E$) είναι μετρικός χώρος και η $\mathcal{E}$ (αντίστοιχα, η $\mathcal{F}$) εννοείται, ονομάζουμε Borel-μετρήσιμη κάθε $f$ η οποία είναι $\mathscr{B}(\Omega)/\mathcal{E}$-μετρήσιμη (αντίστοιχα $\mathcal{F}/\mathscr{B}(E)$-μετρήσιμη).

3. Σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, μια μετρήσιμη συνάρτηση λέγεται **τυχαία μεταβλητή**. Συμβολίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές με κεφαλαία γράμματα $X, Y, \ldots$, σε αντίθεση με τη σύμβαση που υιοθετούμε στον απειροστικό λογισμό και την πραγματική ανάλυση.

Για το σύνολο $f^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A\}$ συνήθως χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\{f \in A\}$. Όμοια, αν $E = \mathbb{R}$, το $\{f < a\}$ συμβολίζει το σύνολο $\{\omega \in \Omega : f(\omega) < a\}$ και $\{f^2 < f + 1\}$ το $\{\omega \in \Omega : f^2(\omega) < f(\omega) + 1\}$.

**Παρατήρηση 5.2.** Γιατί απαιτούμε από μια συνάρτηση $X : \Omega \to E$ να έχει την ιδιότητα (5.1); Γιατί, όταν ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στην $\mathcal{F}$, θέλουμε να μπορούμε να εξετάζουμε πιθανότητες της μορφής $\mathbf{P}(X \in A)$, όπου $A \in \mathcal{E}$, δηλαδή $\mathbf{P}\left(X^{-1}(A)\right)$. Πρέπει επομένως το $X^{-1}(A)$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της $\mathbf{P}$, το οποίο είναι η $\mathcal{F}$.

**Πρόταση 5.3.** *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}), (E, \mathcal{E})$ μετρήσιμοι χώροι, $f : \Omega \to E$ συνάρτηση, και $C \subset \mathcal{E}$ οικογένεια ώστε $\sigma(C) = \mathcal{E}$. Τότε $f^{-1}(C) \subset \mathcal{F}$ αν και μόνο αν $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$.*

Βέβαια ο έλεγχος $f^{-1}(C) \subset \mathcal{F}$ είναι ευκολότερος από τον $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$. Έτσι η πρόταση κάνει ευκολότερο τον έλεγχο της μετρησιμότητας μιας συνάρτησης.

*Απόδειξη.* $\Rightarrow$ Έστω $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{E} : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$. Τότε η $C \subset \mathcal{B}$ και εύκολα βλέπουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα (Άσκηση 1.7). Συνεπώς, $\sigma(C) \subset \mathcal{B}$. Όμως $\sigma(C) = \mathcal{E}$ και $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$. Άρα $\mathcal{B} = \mathcal{E}$.

$\Leftarrow$ Προφανές αφού $C \subset \mathcal{E}$. ■

Ακολουθούν δύο συνέπειες της πρότασης.

**Πόρισμα 5.4.** *Έστω $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ συνάρτηση. Τότε η $f$ είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.*

*Απόδειξη.* Αν $C = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$, γνωρίζουμε ότι $\sigma(C) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Άρα, από την Πρόταση 5.3 προκύπτει το ζητούμενο. ■

Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει αν αντικαταστήσουμε τα διαστήματα $(-\infty, a]$ με $(-\infty, a)$ ή γενικά με οποιαδήποτε οικογένεια διαστημάτων που παράγουν την $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Επίσης, αντίστοιχο συμπέρασμα προκύπτει αν έχουμε μετρήσιμη συνάρτηση με τιμές στο $[-\infty, \infty]$.

Υπάρχουν μετρήσιμες συναρτήσεις; Είναι πολλές; Καταρχάς, θα δούμε αμέσως ότι όλες οι συνεχείς συναρτήσεις είναι μετρήσιμες. Υπενθυμίζουμε ότι, αν $(\Omega, d_1)$, $(E, d_2)$ μετρικοί χώροι, μια συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι συνεχής αν για κάθε $V \subset E$ ανοιχτό έχουμε ότι $f^{-1}(V)$ είναι ανοιχτό. Δηλαδή αν η αντίστροφη εικόνα κάθε ανοιχτού συνόλου είναι ανοιχτό σύνολο.

**Πόρισμα 5.5.** *Έστω $(\Omega, d_1)$, $(E, d_2)$ μετρικοί χώροι και $f : \Omega \to E$ συνεχής συνάρτηση. Αν $\mathcal{F} = \mathscr{B}(\Omega)$ και $\mathcal{E} = \mathscr{B}(E)$, τότε η $f$ είναι $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ μετρήσιμη.*

*Απόδειξη.* Για την οικογένεια $\mathcal{S}$ των ανοιχτών συνόλων του $E$ έχουμε ότι $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{E}$ και όλα τα στοιχεία του $f^{-1}(\mathcal{S})$ είναι ανοιχτά σύνολα (αφού η $f$ είναι συνεχής) και άρα $f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{F}$. Το συμπέρασμα έπεται από την Πρόταση 5.3. ■

Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη τις βασικές ιδιότητες κλειστότητας του συνόλου των μετρησίμων συναρτήσεων. Εν ολίγοις, αν ξεκινήσει κανείς με μετρήσιμες συναρτήσεις και τις συνδυάσει με κάποιο «φυσιολογικό» τρόπο, προκύπτουν πάλι μετρήσιμες συναρτήσεις.

**Πρόταση 5.6.** *Έστω $f, g : \Omega \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις στο μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$ και $a \in \mathbb{R}$. Τότε μετρήσιμες είναι επίσης οι συναρτήσεις*

$$af, |f|, f+g, fg, f/g, \min\{f, g\}, \max\{f, g\}, f^+, f^-,$$

*όπου καθεμία ορίζεται έτσι ώστε να είναι σταθερή και ίση με μία αυθαίρετη πεπερασμένη σταθερά στο σύνολο των σημείων απροσδιοριστίας $(\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0/0)$.*

**Πρόταση 5.7.** *Έστω $(f_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$ και με τιμές στο $[-\infty, \infty]$. Τότε:*

*(i) Οι συναρτήσεις*

$$\inf_{n \geq 1} f_n, \sup_{n \geq 1} f_n, \varliminf_{n \to \infty} f_n, \varlimsup_{n \to \infty} f_n,$$

*είναι επίσης μετρήσιμες.*

*(ii) Αν η $(f_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει σημειακά σε μια συνάρτηση $f$, τότε η $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.*

Αντιπαραβάλετε την προηγούμενη πρόταση με το γεγονός ότι γενικά το σημειακό όριο συνεχών συναρτήσεων δεν είναι συνεχής συνάρτηση. Η μετρησιμότητα είναι πιο ανθεκτική σε μετασχηματισμούς.

**Πρόταση 5.8.** *Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$, $(E, \mathcal{E})$, $(G, \mathcal{G})$ μετρήσιμοι χώροι και $f : \Omega \to E$, $g : E \to G$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε η $g \circ f : \Omega \to G$ είναι $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ μετρήσιμη.*

*Απόδειξη.* Έστω $A \in \mathcal{G}$. Τότε, $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$. Όμως $g^{-1}(A) \in \mathcal{E}$, άρα $f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{F}$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο. ■

**Πρόταση 5.9.** *Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος. Τότε:*

*(i) Για $A \subset \Omega$, η $\mathbf{1}_A$ είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $A \in \mathcal{F}$.*

*(ii) Αν $f_1, f_2, \ldots, f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ είναι $\mathcal{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$ μετρήσιμες συναρτήσεις και $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)/\mathscr{B}(\mathbb{R})$ μετρήσιμη, τότε η $g(f_1, f_2, \ldots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.*

*Απόδειξη.* Θα δείξουμε μόνο το $(i)$. Αν $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, έχουμε

$$(\mathbf{1}_A)^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{αν} \quad 0, 1 \notin B, \\ \Omega \setminus A & \text{αν} \quad 0 \in B, 1 \notin B, \\ A & \text{αν} \quad 0 \notin B, 1 \in B, \\ \Omega & \text{αν} \quad 0, 1 \in B. \end{cases} \tag{5.2}$$

Αν η $\mathbf{1}_A$ είναι μετρήσιμη, τότε για $B = \{1\}$, έχουμε $(\mathbf{1}_A)^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, δηλαδή $A \in \mathcal{F}$. Αντίστροφα, αν $A \in \mathcal{F}$, τότε από την (5.2) έχουμε $(\mathbf{1}_A)^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ για κάθε $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. ■

**Παράδειγμα 5.10.** Έστω $(f_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων σε μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$ με τιμές στο $\mathbb{R}$. Θέτουμε $T := \min\{k \in \mathbb{N}^+ : f_k > 0\}$ με τη σύμβαση $\min \emptyset = \infty$. Τότε η $T$ είναι μετρήσιμη γιατί για $k \in \mathbb{N}^+$ ισχύει

$$\{T \leq k\} = \{f_1 > 0\} \cup \{f_2 > 0\} \cup \cdots \cup \{f_k > 0\} \in \mathcal{F}.$$

Για $k$ μη θετικό ακέραιο έχουμε $\{T \leq k\} = \emptyset$, ενώ για κάθε πραγματικό $x$ έχουμε $\{T \leq x\} = \{T \leq [x]\}$.

Επίσης, για οποιοδήποτε $n \geq 1$, η $\cos(f_1+f_2+\cdots+f_n)$ είναι μετρήσιμη λόγω του $(ii)$ της προηγούμενης πρότασης και του ότι η $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \cos(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ είναι συνεχής.

**Ορισμός 5.11.** Μια συνάρτηση $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ λέγεται **απλή** αν η εικόνα της είναι πεπερασμένο σύνολο.

Αν οι διαφορετικές τιμές που παίρνει μια απλή συνάρτηση είναι $a_1, a_2, \ldots, a_n$ και θέσουμε $A_i := X^{-1}(\{a_i\})$, τότε η $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ είναι διαμέριση του $\Omega$, και η $f$ γράφεται

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}. \tag{5.3}$$

Προφανώς μια απλή $f$ είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν τα σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι μετρήσιμα.

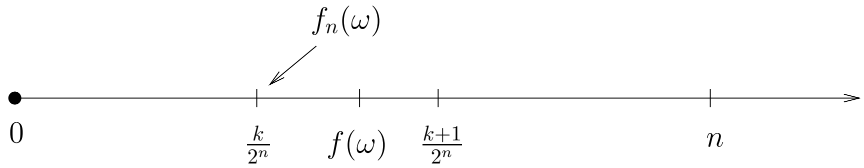
Μια απλή συνάρτηση δεν γράφεται μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός από δείκτριες συναρτήσεις. Αν τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ δεν είναι απαραίτητα ξένα, τότε η σχέση (5.3) ορίζει πάλι μια απλή συνάρτηση. Αν όμως ζητήσουμε τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ να είναι ξένα ανά δύο και οι αριθμοί $a_1, \ldots, a_n$ διαφορετικοί μεταξύ τους, τότε η γραφή (5.3) είναι μοναδική (με μόνη ελευθερία στη σειρά με την οποία αριθμούμε τα σύνολα και τους αριθμούς) και ονομάζεται *κανονική μορφή* της $f$.

**Πρόταση 5.12.** *Έστω $f : \Omega \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $(f_n)_{n\geq 1}$ μη αρνητικών, απλών, μετρησίμων συναρτήσεων με πεπερασμένες τιμές ώστε $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ κατά σημείο.*

Το ότι η ακολουθία $(f_n)_{n\geq 1}$ είναι αύξουσα σημαίνει ότι $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και $n \geq 1$.

*Απόδειξη.* Για $n \geq 1$, θέτουμε

$$f_n(\omega) := \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{αν } f(\omega) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \text{ με } k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n2^n - 1, \\ n & \text{αν } f(\omega) \geq n. \end{cases}$$




Σχήμα 5.2: Ο ορισμός της προσέγγισης $f_n$. Όλες οι τιμές πάνω από $n$ απεικονίζονται στο $n$. Στο διάστημα $[0, n]$ η προσέγγιση γίνεται με λάθος το πολύ $1/2^n$.

Κάθε $f_n$ είναι μη αρνητική, μετρήσιμη, και απλή αφού το σύνολο τιμών της είναι πεπερασμένο, και παίρνει την τιμή $k/2^n$, όπου $0 \leq k \leq n2^n - 1$, στο μετρήσιμο σύνολο $f^{-1}([k2^{-n}, (k+1)2^{-n}))$ και την τιμή $n$ στο $f^{-1}([n, \infty])$.
Για το $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Αν $f(\omega) < \infty$, παίρνουμε φυσικό $n_0 > f(\omega)$. Για $n \geq n_0$ έχουμε $f_n(\omega) \leq f(\omega) \leq f_n(\omega) + 2^{-n}$, άρα $|f_n(\omega) - f(\omega)| < 2^{-n}$ και $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$. Αν $f(\omega) = \infty$, τότε $f_n(\omega) = n \to \infty$ για $n \to \infty$.

Για το ότι η ακολουθία είναι αύξουσα, παρατηρούμε τα εξής:

- Αν $f(\omega) = \infty$, τότε $f_n(\omega) = n$, που είναι αύξουσα ακολουθία.
- Αν $f(\omega) < \infty$, έστω $n \geq 1$, θα δείξουμε ότι $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$. Έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

(α) $f(\omega) < n$.

(β) $f(\omega) \in [n, n+1)$.

(γ) $f(\omega) \geq n + 1$.

Για το (α) παρατηρούμε ότι το $f_n(\omega)$ θα ισούται με το αριστερό άκρο του διαστήματος $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ στο οποίο ανήκει το $f(\omega)$. Για τον καθορισμό του $f_{n+1}(\omega)$, χωρίζουμε το $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ σε δύο μισά, τα

$$\left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right), \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right)$$

και το $f_{n+1}(\omega)$ ισούται με το αριστερό άκρο του μισού στο οποίο ανήκει το $f(\omega)$. Άρα είναι τουλάχιστον $k2^{-n} = f_n(\omega)$. Οι περιπτώσεις (β) και (γ) αφήνονται ως άσκηση. ∎

## 5.2 Σ-άλγεβρα παραγόμενη από συναρτήσεις

**Ορισμός 5.13.** Έστω $\Omega$ σύνολο. Για μια συνάρτηση $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$, σ-άλγεβρα παραγόμενη από την $f$ ονομάζουμε το σύνολο

$$\sigma(f) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathscr{B}([-\infty, \infty])\} = f^{-1}(\mathscr{B}([-\infty, \infty]))$$

Το ότι αυτό το σύνολο είναι σ-άλγεβρα το έχουμε δει στην Άσκηση 1.7 (β). Αυτή είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο $\Omega$ η οποία κάνει την $f$ μετρήσιμη στον $(\Omega, \mathcal{A})$. Βέβαια, αν η $f$ είναι μετρήσιμη στον $(\Omega, \mathcal{F})$, τότε θα έχουμε $\sigma(f) \subset \mathcal{F}$.

**Παράδειγμα 5.14.** Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = -\mathbf{1}_{x<0} + \mathbf{1}_{x\geq 0}$ παράγει τη σ-άλγεβρα

$$\{\mathbb{R}, (-\infty, 0), [0, \infty), \emptyset\}$$

αφού παίρνει μόνο τις τιμές $-1, 1$ και οι αντίστροφες εικόνες αυτών των τιμών είναι τα διαστήματα $(-\infty, 0), [0, \infty)$ αντίστοιχα. Οι λεπτομέρειες της απόδειξης αφήνονται ως άσκηση.

**Παράδειγμα 5.15.** Η συνάρτηση ακέραιο μέρος $f(x) = [x]$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ παράγει τη σ-άλγεβρα $\sigma(f) = \sigma(C)$ όπου $C := \{[k, k+1) : k \in \mathbb{Z}\}$ [Ο ισχυρισμός αυτός αφήνεται ως άσκηση. Παρατηρούμε ότι η $f$ παίρνει τιμές στο $\mathbb{Z}$ και $f^{-1}(\{k\}) = [k, k+1)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$]. Η $C$ είναι μια διαμέριση του $\mathbb{R}$.

**Παράδειγμα 5.16.** Παίρνουμε $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^+}$. Μπορούμε να δούμε αυτό το σύνολο ως τον δειγματικό χώρο για μια ακολουθία ρίψεων ενός νομίσματος. Το $-1$ παριστά το αποτέλεσμα «Κορώνα» και το 1 το αποτέλεσμα «Γράμματα». Για $n \in \mathbb{N}^+$, ορίζουμε τη συνάρτηση $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ με $X_n(\omega) = \omega_n$, όπου $\omega = (\omega_n)_{n\geq 1} \in \Omega$. Δηλαδή η $X_n$ είναι η προβολή στη $n$-οστή συντεταγμένη. Η $X_n$ παίρνει μόνο δύο τιμές. Οπότε η $\sigma(X_n)$ είναι ακριβώς το σύνολο $\{\emptyset, \Omega, A_{n,-1}, A_{n,1}\}$, με

$$\begin{aligned}
A_{n,-1} &:= X_n^{-1}(\{-1\}) = \{\omega \in \Omega : \omega_n = -1\} = \{-1, 1\}^{n-1} \times \{-1\} \times \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^+ \setminus [n]}, \\
A_{n,1} &:= X_n^{-1}(\{1\}) = \{\omega \in \Omega : \omega_n = 1\} = \{-1, 1\}^{n-1} \times \{1\} \times \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^+ \setminus [n]},
\end{aligned}$$

όπου $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$.

**Ορισμός 5.17.** Έστω $\Omega$ σύνολο. Αν $\{f_i : i \in I\}$ είναι οικογένεια συναρτήσεων στο $\Omega$ με τιμές στο $[-\infty, \infty]$, σ-άλγεβρα παραγόμενη από τις συναρτήσεις $\{f_i : i \in I\}$ ονομάζουμε το σύνολο

$$\sigma(\{f_i : i \in I\}) := \sigma\Big( \cup_{i\in I} \sigma(f_i)\Big). \tag{5.4}$$

Το σύνολο στο δεξί μέλος έχει οριστεί στην Παράγραφο 1.2. Αυτή είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που κάνει όλες τις $\{f_i : i \in I\}$ μετρήσιμες. Αν $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, τη συμβολίζουμε με $\sigma(f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

**Παράδειγμα 5.18.** Έστω $\Omega$ σύνολο, $n \geq 2$, και $f_1, f_2, \ldots, f_n : \Omega \to \mathbb{R}$. Τότε

$$\sigma(f_1 + f_2 + \cdots + f_n) \subset \sigma(f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Πράγματι, οι συναρτήσεις $f_1, f_2, \ldots, f_n$ είναι $\sigma(f_1, f_2, \ldots, f_n)$-μετρήσιμες και από την Πρόταση 5.6, είναι $\sigma(f_1, f_2, \ldots, f_n)$-μετρήσιμη και η συνάρτηση $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$. Όμως η $\sigma(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που κάνει την $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ μετρήσιμη. Ο ισχυρισμός έπεται.

**Παράδειγμα 5.19.** Συνεχίζουμε από το Παράδειγμα 5.16. Θα περιγράψουμε τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_n := \sigma(\{X_1, X_2, \ldots, X_n\})$. Για δεδομένη ακολουθία $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \{-1, 1\}^n$ θεωρούμε το σύνολο

$$\begin{aligned}
A_s :&= \{(s_1, s_2, \ldots, s_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) : x_i \in \{-1, 1\} \text{ για κάθε } i \geq n+1\} \\
&= X_1^{-1}(\{s_1\}) \cap X_2^{-1}(\{s_2\}) \cap \cdots \cap X_n^{-1}(\{s_n\}).
\end{aligned}$$

Δηλαδη το $A_s$ περιέχει όλες τις άπειρες ακολουθίες από $-1$ και 1 που το αρχικό τους τμήμα είναι το $s$ και μετά είναι ελεύθερες να έχουν ότι θέλουν. Για μια ακολουθία που ανήκει στο $A_s$, η συμπεριφορά της ως τον χρόνο $n$ είναι γνωστή.

Ισχυρισμος: Η $\mathcal{F}_n$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από τη διαμέριση $C := \{A_s : s \in \{-1, 1\}^n\}$ του $\Omega$.

Από τον ορισμό της, η $\mathcal{F}_n$ πρέπει να περιέχει τα $X_i^{-1}(\{s_i\})$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Άρα, ως σ-άλγεβρα, περιέχει και το $A_s$, που είναι πεπερασμένη τομή των $X_i^{-1}(\{s_i\})$. Επομένως, $\sigma(C) \subset \mathcal{F}_n$. Από την άλλη, κάθε $X_i$ με $1 \leq i \leq n$ είναι μετρήσιμη ως προς τη $\sigma(C)$. Για παράδειγμα

$$X_i^{-1}(\{1\}) = \cup_{s\in\{-1,1\}^n : s_i=1} A_s$$

είναι πεπερασμένη ένωση στοιχείων της $\sigma(C)$, άρα στοιχείο της. Από την ελαχιστότητα της $\mathcal{F}_n$, έπεται ότι $\mathcal{F}_n \subset \sigma(C)$ και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

## Ασκήσεις

**5.1** Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας. Να δείξετε ότι για μια $X : \Omega \to \mathbb{R}$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(α) $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ για κάθε $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.
(β) $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ για κάθε $A \subset \mathbb{R}$ ανοιχτό σύνολο.
(γ) $X^{-1}([a, b]) \in \mathcal{F}$ για κάθε $a < b$ πραγματικούς αριθμούς.

**5.2** Έστω $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ τυχαία μεταβλητή. Να δείξετε ότι $\{X = -\infty\}, \{X = \infty\} \in \mathcal{F}$.

**5.3** (Μετρήσιμες συναρτήσεις σε σ-άλγεβρα παραγόμενη απο διαμέριση) Έστω $C := \{A_i : i \in I\}$ μια αριθμήσιμη διαμέριση ενός συνόλου $\Omega$, και $\mathcal{F} := \sigma(C)$ (Παράδειγμα 1.1). Να δειχθεί ότι μια συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$ μετρήσιμη αν και μόνο αν είναι σταθερή σε κάθε σύνολο της διαμέρισης.

**5.4** Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι τα παρακάτω σύνολα είναι στοιχεία της $\mathcal{F}$:
(α) $\{\lim_n X_n = -\infty\}, \{\lim_n X_n = \infty\}$.
(β) $\{\lim_n X_n$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός$\}$.

**5.5** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μονότονη συνάρτηση. Να δειχθεί ότι είναι μετρήσιμη.

**5.6** Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος. Αν $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες, να δείξετε ότι το $\{f = g\}$ είναι μετρήσιμο.

**5.7** Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με τιμές στο $\mathbb{R}$. Θέτουμε $T := \min\{n \geq 1 : X_n > 2\}$ με τη σύμβαση $\min \emptyset = \infty$.
(α) Να δειχθεί ότι $\{T = \infty\} \in \mathcal{F}$.
(β) Να δειχθεί ότι η $T$ είναι τυχαία μεταβλητή.

**5.8** Έστω $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε δείκτες $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ όπου $1 \leq k < n$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $Y := (X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k})$ είναι τυχαία μεταβλητή.
[Υπόδειξη: Ισχύει $Y = p(X)$, όπου $p$ η προβολή $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ που απεικονίζει το $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ στο $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})$.]

**5.9** Να δειχθεί ότι πράγματι το δεξί μέλος της (5.4) είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ που κάνει όλες τις $\{f_i : i \in I\}$ $\mathcal{A}$-μετρήσιμες.

**5.10** Σε αυτή την άσκηση θεωρούμε το πεδίο τιμών της $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δηλαδή το $\mathbb{R}$, εφοδιασμένο με τη σ-αλγεβρα των συνόλων Borel. Περιγράψτε τη $\sigma(f)$ στην περίπτωση που
(α) $f(x) = x^3$,
(β) $f(x) = x^2$.

**5.11** Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$. Αν $\mathbf{P}(X > 1) > 0$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\mathbf{P}(X > 1 + \varepsilon) > 0$.

# 6

# Ολοκλήρωση

## 6.1 Ολοκλήρωμα Lebesgue. Ορισμός

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα μιας $\mathcal{A}/\mathcal{B}([-\infty, \infty])$ μετρήσιμης συνάρτησης $f : X \to [-\infty, \infty]$. Αυτό θα το κάνουμε σε τρία βήματα. Πρώτα για $f \geq 0$ απλή μετρήσιμη, έπειτα για $f \geq 0$ μετρήσιμη, και τέλος για $f$ μετρήσιμη με τιμές στο $[-\infty, \infty]$.

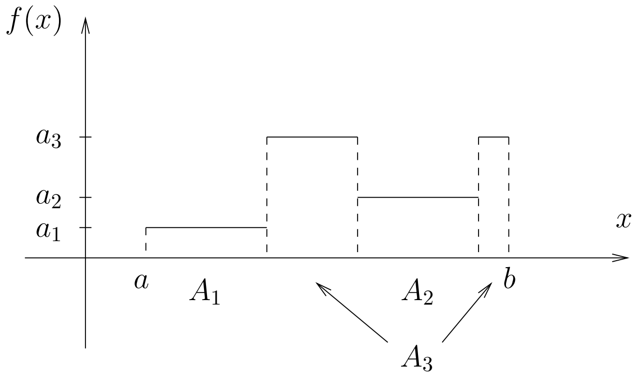
Βήμα 1: $f \geq 0$ απλή μετρήσιμη.

**Ορισμός 6.1.** Έστω $f : X \to [0, \infty]$ απλή μετρήσιμη συνάρτηση με κανονική μορφή $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}$. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesque της $f$ ως προς το μέτρο $\mu$ ως εξής:

$$\int f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i), \tag{6.1}$$

με τη σύμβαση $0 \cdot (+\infty) = 0$.
Το ολοκλήρωμα είναι στοιχείο του $[0, \infty]$.

Είναι φυσιολογικός αυτός ο ορισμός; Ας τον ελέγξουμε στην περίπτωση που το $X$ είναι ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ του $\mathbb{R}$ και $\mu$ είναι το μέτρο Lebesgue $\lambda$ στο $[a, b]$.




Σχήμα 6.1: Ολοκλήρωμα απλής συνάρτησης.

Η συνάρτηση $f$ στο Σχήμα 6.1 είναι απλή και μάλιστα τα σύνολα στα οποία παίρνει διαφορετικές τιμές είναι το καθένα διάστημα ή ένωση διαστημάτων. Με βάση τον προηγούμενο ορισμό, το ολοκλήρωμα της είναι

$$a_1 \lambda(A_1) + a_2 \lambda(A_2) + a_3 \lambda(A_3).$$

Αυτό είναι το εμβαδόν κάτω από το γράφημα της $f$. Όπως στο ολοκλήρωμα Riemann, έτσι και εδώ, τα γινόμενα $a_i \lambda(A_i)$ δίνουν εμβαδόν ορθογωνίου: ύψος επί βάση. Μόνο που εδώ η βάση ενδέχεται να μην είναι διάστημα. Σε κάθε περίπτωση όμως, το μήκος της βάσης μετριέται σωστά από το μέτρο Lebesgue.

Βήμα 2: $f \geq 0$ μετρήσιμη.

**Ορισμός 6.2.** Έστω $f : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Το ολοκλήρωμα Lebesgue της $f$ ως προς το μέτρο $\mu$ ορίζεται ως εξής:

$$\int f \mathrm{d}\mu := \sup\Big\{ \int s \,\mathrm{d}\mu : s \text{ απλή, μετρήσιμη με } 0 \le s \le f \Big\}.$$

**Παρατήρηση 6.3.** Ο Ορισμός 6.2, στην περίπτωση που η $f$ είναι απλή, συμφωνεί με τον Ορισμό 6.1.

Βήμα 3: $f : X \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη.

**Ορισμός 6.4.** Έστω $f : X \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Το ολοκλήρωμα Lebesgue της $f$ ως προς το μέτρο $\mu$ ορίζεται ως εξής:

$$\int f \,\mathrm{d}\mu := \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu$$

εφόσον στο δεξί μέλος της ισότητας δεν εμφανίζεται απροσδιοριστία της μορφής $+\infty - \infty$. Στην περίπτωση που το ολοκλήρωμα είναι πραγματικός αριθμός, λέμε ότι η συνάρτηση $f$ είναι **(Lebesgue) ολοκληρώσιμη**.

Για το $\int f \, d\mu$ χρησιμοποιούμε επίσης τον συμβολισμό $\int f(x) \, d\mu(x)$.

**Παρατήρηση 6.5.**

(i) Τα $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu$ και $\int f^- \,\mathrm{d}\mu$ που εμφανίζονται στον Ορισμό 6.4 ορίζονται από τον Ορισμό 6.2.

(ii) Το ολοκλήρωμα μιας μετρήσιμης συνάρτησης, όταν αυτό ορίζεται, είναι στοιχείο του $[-\infty, \infty]$.

(iii) Μια μετρήσιμη συνάρτηση $f$ είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν και τα δύο ολοκληρώματα $\int f^- \,\mathrm{d}\mu$, $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu$ είναι πεπερασμένα.

(iv) Για μια $f \ge 0$ μετρήσιμη συνάρτηση, θεωρούμε την ακολουθία $(f_n)_{n\ge1}$ των απλών συναρτήσεων που ορίστηκαν στην Πρόταση 5.12. Αποδεικνύεται ότι

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Δηλαδή το ολοκλήρωμα είναι το όριο των ολοκληρωμάτων αυτών των απλών συναρτήσεων. Αυτό είναι αντίστοιχο της προσέγγισης του ολοκληρώματος Riemann μιας Riemann-ολοκληρώσιμης συνάρτησης από τα ολοκληρώματα κλιμακωτών συναρτήσεων.

**Παρατήρηση 6.6.** Όποτε μια $f$ γράφεται ως $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$ με τα $A_i$ μετρήσιμα και τα $a_i \ge 0$, τότε πάλι ισχύει ο τύπος (6.1). Δηλαδή δεν είναι απαραίτητο η γραφή $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$ να αντιστοιχεί στην κανονική μορφή της $f$. Ενδεχομένως κάποια από τα $\{A_i : 1 \le i \le n\}$ να τέμνονται και κάποια από τα $\{a_i : 1 \le i \le n\}$ να είναι ίσα. Το ίδιο ισχύει και όταν $n = \infty$, δηλαδή $f = \sum_{i=1}^\infty a_i \mathbf{1}_{A_i}$ με τα $a_i, A_i$ όπως πριν. Και οι δύο ισχυρισμοί έπονται από το Πόρισμα 6.30(i) πιο κάτω.

### 6.2 Ειδικές περιπτώσεις

Θα δούμε εδώ τις περιπτώσεις που το μέτρο $\mu$ της προηγούμενης παραγράφου είναι το αριθμητικό μέτρο στο $\mathbb{N}$ ή το μέτρο Lebesgue σε ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$.

Αριθμητικο μετρο: Αν πάρουμε $\mu$ το αριθμητικό μέτρο στον $X = \mathbb{N}$ (Παράδειγμα 2.2) και $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$ συνάρτηση, τότε

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n). \tag{6.2}$$

Αυτό ισχύει λόγω της Παρατήρησης 6.6 αφού η $f$ γράφεται ως $f = \sum_{n=0}^\infty f(n) \mathbf{1}_{\{n\}}$ και κάθε μονοσύνολο $\{n\}$ έχει αριθμητικό μέτρο 1.

Έπειτα είναι απλό να δούμε ότι η (6.2) ισχύει για κάθε $f : \mathbb{N} \to [-\infty, \infty]$ με $\sum_{n=0}^{\infty} |f(n)| < \infty$. Άρα το άθροισμα θετικής ή απολύτως συγκλίνουσας σειράς είναι ειδική περίπτωση του ολοκληρώματος Lebesgue. Όμως αθροίσματα σειρών που συγκλίνουν υπό συνθήκη, όπως η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, δεν καλύπτονται (το ολοκλήρωμα Lebesgue της $f(n) := (-1)^n/n$ ως προς το αριθμητικό μέτρο δεν ορίζεται). Το ολοκλήρωμα Lebesgue δεν προσθέτει ποσότητες με κάποια «σειρά» αλλά μαζικά.

Μετρο Lebesgue σε φραγμενο διαστημα Έστω $a < b$ πραγματικοί αριθμοί. Το ολοκλήρωμα Lebesgue στο χώρο μέτρου $(\mathbb{R}, \mathscr{B}([a, b]), \lambda)$ μιας Borel-μετρήσιμης συνάρτησης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ το συμβολίζουμε συνήθως με $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ και στην περίπτωση που η $f$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη ταυτίζεται με το ολοκλήρωμα Riemann [δες Stein and Shakarchi (2005), Κεφάλαιο 2, Θεώρημα 1.5].

Μετρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$: Το ολοκλήρωμα Lebesgue στο χώρο μέτρου $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ μιας Borel-μετρήσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ το συμβολίζουμε συνήθως με $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{d}x$. Συμπίπτει με το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ αν η $f$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ και είναι θετική ή το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ είναι πεπερασμένο.

## 6.3 Η οπτική του ολοκληρώματος Lebesgue

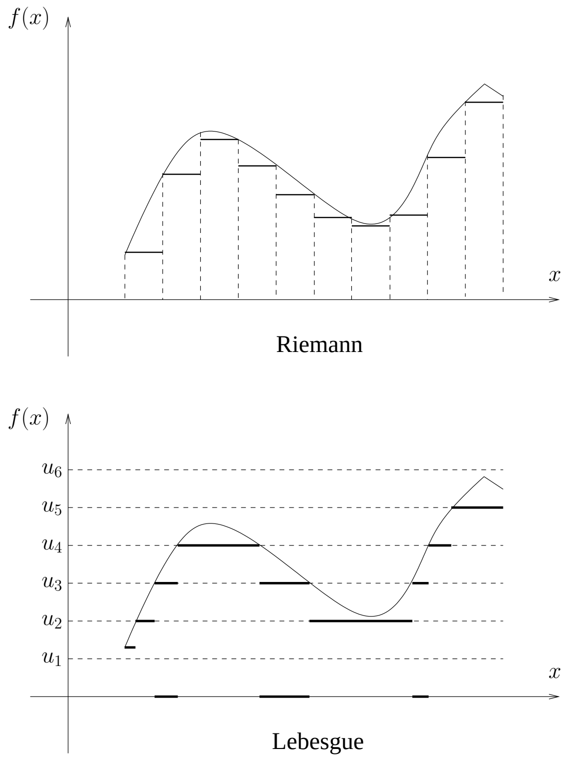
Είναι ενδιαφέρον να συγκρίνουμε τις οριακές διαδικασίες που δίνουν τα ολοκληρώματα Riemann και Lebesgue σε μια περίπτωση συνάρτησης/χώρου που και τα δύο ολοκληρώματα έχουν νόημα [Ως οριακή διαδικασία για το Lebesgue παίρνουμε αυτήν που περιγράφεται στην Παρατήρηση 6.5 (iv)]. Πιο συγκεκριμένα, παίρνουμε $a < b$ πραγματικούς αριθμούς και μια $f : [a, b] \to [0, \infty)$ φραγμένη, Riemann-ολοκληρώσιμη, και μετρήσιμη. Το φραγμένη είναι προαπαιτούμενο για το ολοκλήρωμα Riemann, το μετρήσιμη για το Lebesgue. Και επειδή είναι μη αρνητική, το ολοκλήρωμα Lebesgue ορίζεται επίσης.

Για το Riemann, διαμερίζουμε το *πεδίο ορισμού* της $f$ σε τμήματα ίσου μήκους (Δες σχήμα 6.2). Σε καθένα από αυτά, η $f$ έχει μια δεδομένη ελάχιστη τιμή. Πολλαπλασιάζουμε αυτή την ελάχιστη τιμή με το μήκος του τμήματος για να βρούμε τη συνεισφορά του τμήματος στην προσέγγιση του ολοκληρώματος. Έπειτα προσθέτουμε τις συνεισφορές όλων των τμημάτων. Καθώς το μήκος των τμημάτων τείνει στο μηδέν, παίρνουμε την τιμή του ολοκληρώματος Riemann της $f$.

Για το Lebesgue, διαμερίζουμε το *σύνολο τιμών* της $f$ σε τμήματα ίσου μήκους. Αυτή η διαμέριση δίνει μια απλή συνάρτηση (το γράφημά της είναι τα χοντρά ευθύγραμμα τμήματα στην κάτω γραφική παράσταση στο Σχήμα 6.2 εκτός από εκείνα που είναι στον άξονα), που είναι μία από τις $f_n$ της Πρότασης 5.12. Ας πάρουμε ένα τμήμα, π.χ. το $[u_3, u_4)$. Η συνεισφορά του στην προσέγγιση $\int f_n d\lambda$ του ολοκληρώματος είναι το εμβαδόν $u_3 \lambda\left(f^{-1}([u_3, u_4))\right)$ του «παραλληλογράμμου» με ύψος $u_3$ και βάση $f^{-1}([u_3, u_4))$ [σχέση (6.1)]. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το $f^{-1}([u_3, u_4))$ είναι ένωση τριών διαστημάτων, σημειωμένων με χοντρή γραμμή στον $x$-άξονα. Το μήκος αυτής της βάσης είναι το μέτρο Lebesgue του συνόλου $f^{-1}([u_3, u_4))$. Πάλι προσθέτουμε τις συνεισφορές όλων των τμημάτων και, καθώς το μήκος τους τείνει στο μηδέν ($n \to \infty$), παίρνουμε την τιμή του ολοκληρώματος Lebesgue της $f$.

Το μη τετριμμένο της διαδικασίας για το ολοκλήρωμα Lebesgue είναι ότι πρέπει να είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το μήκος του συνόλου $f^{-1}([u_{k-1}, u_k))$. Στο πιο πάνω παράδειγμα, έτυχε αυτό να είναι ένωση τριών διαστημάτων και είναι προφανές ποιο πρέπει να ονομάσουμε μήκος του. Θα μπορούσε όμως να είναι ένα πολύ περίεργο σύνολο, ειδικά όταν η $f$ δεν είναι συνεχής. Η έννοια μήκους για σύνολα Borel δίνεται ακριβώς από το μέτρο Lebesgue τους, του οποίου η κατασκευή δεν είναι απλή και γι' αυτό ακριβώς την παραλείψαμε σε αυτές τις σημειώσεις.

Κλείνοντας αυτή τη σύγκριση, να παρατηρήσουμε το εξής πολύ σημαντικό. Για τον ορισμό του ολοκληρώματος Lebesgue, το πεδίο ορισμού, $X$, της συνάρτησης $f : X \to \mathbb{R}$ που θέλουμε να ολοκληρώσουμε αρκεί να είναι εφοδιασμένο με μία σ-άλγεβρα και ένα μέτρο. Δεν είναι αναγκαίο να έχει κάποια άλλη δομή (μετρικού ή διανυσματικού χώρου) όπως είναι οι $\mathbb{R}^d$ στους οποίους έχουμε




Σχήμα 6.2: Η διαφορά οπτικής των ολοκληρωμάτων Riemann και Lebesgue.

ορίσει το ολοκλήρωμα Riemann. Για το ολοκλήρωμα Riemann χρησιμοποιούμε την επιπλέον δομή με κρίσιμο τρόπο.

## 6.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος

**Πρόταση 6.7.** *Έστω $f, g : X \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις των οποίων το ολοκλήρωμα ορίζεται. Τότε*

*(i)* $\int af \, \mathrm{d}\mu = a \int f \, \mathrm{d}\mu$, *για* $a \in \mathbb{R}$.

*(ii)* $\int (f+g) \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu + \int g \, \mathrm{d}\mu$.

*(iii) Αν* $f \leq g$, *τότε* $\int f \, \mathrm{d}\mu \leq \int g \, \mathrm{d}\mu$.

*(iv)* $\left| \int f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int |f| \, \mathrm{d}\mu$.

*Η (ii) ισχύει με την προϋπόθεση ότι στο δεξί της μέλος δεν εμφανίζεται η μορφή* $\infty - \infty$.

**Παρατήρηση 6.8.** Για $f$ όπως στην προηγούμενη πρόταση, η σχέση $|f| = f^- + f^+$ και η ιδιότητα (ii) δίνουν ότι

$$\int |f| \, \mathrm{d}\mu = \int f^- \, \mathrm{d}\mu + \int f^+ \, \mathrm{d}\mu. \tag{6.3}$$

Επομένως, η $f$ είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή έχει ολοκλήρωμα πραγματικό αριθμό, αν και μόνο αν $\int |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$.

Αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου, $f : X \to [-\infty, \infty]$ είναι μετρήσιμη, και $A \in \mathcal{A}$, ορίζουμε το ολοκλήρωμα της $f$ ως προς το μέτρο $\mu$ στο $A$ ως

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu := \int f \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\mu$$

εφόσον ορίζεται το δεξί μέλος της ισότητας. Όταν $A = X$, το $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ είναι απλώς το $\int f \, d\mu$. Επίσης, εύκολα βλέπουμε ότι αν $f \geq 0$ και $A \subset B$ στοιχεία της $\mathcal{A}$, ισχύει ότι $\int_A f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_B f \, \mathrm{d}\mu$.

Στην περίπτωση ενός χώρου πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, το ολοκλήρωμα μιας τυχαίας μεταβλητής $X : \Omega \to \mathbb{R}$ λέγεται μέση τιμή της $X$ και, αντί του $\int X \, \mathrm{d}\mathbf{P}$, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\mathbf{E}(X)$. Συνοψίζουμε στον επόμενο ορισμό.

**Ορισμός 6.9.** Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ τυχαία μεταβλητή. Η **μέση τιμή** της $X$ ορίζεται ως

$$\mathbf{E}(X) := \int X \, \mathrm{d}\mathbf{P}$$

εφόσον το δεξί μέλος της ισότητας ορίζεται. Πολλές φορές γράφουμε την $\mathbf{E}(X)$ και ως $\mathbf{E}\, X$.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε τη σχέση αυτού του ορισμού με τον ορισμό της μέσης τιμής που δίνεται στις στοιχειώδεις πιθανότητες (σχέσεις (7.5), (7.9)).

**Παρατήρηση 6.10.** Αντίστοιχα, αν $A \in \mathcal{F}$, ορίζουμε τη μέση τιμή της $X$ πάνω στο $A$ ως $\mathbf{E}(X\mathbf{1}_A)$ και τη συμβολίζουμε με $\mathbf{E}(X; A)$ εφόσον η $\mathbf{E}(X\mathbf{1}_A)$ μπορεί να οριστεί.

Δύο ειδικές περιπτώσεις μέσης τιμής είναι οι εξής:

(i) Αν η $X$ ισούται με μια σταθερά $c \in \mathbb{R}$, τότε $\mathbf{E}(X) = c$ γιατί η $X$ είναι απλή.

(ii) Αν $X = \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{F}$, τότε $\mathbf{E}(X) = \mathbf{P}(A)$.

Το (ii) σε συνδυασμό με τις ιδιότητες της μέσης τιμής (Προτάσεις 6.7, 6.14) είναι πολύ χρήσιμο (Ασκήσεις 6.1 -6.3).

**Παρατήρηση 6.11.** Σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$, λέμε ότι μια ιδιότητα $\Psi$ ισχύει **σχεδόν παντού** αν υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $A \supset \{x \in X : \text{η } \Psi \text{ δεν ισχύει}\}$ και $\mu(A) = 0$. Θα θέλαμε να δώσουμε ως ορισμό το ότι το σύνολο στο οποίο η ιδιότητα δεν ισχύει, δηλαδή το $\{x \in X : \text{η } \Psi \text{ δεν ισχύει}\}$, έχει μέτρο 0. Όμως επειδή αυτό το σύνολο δεν είναι απαραίτητα μετρήσιμο, δίνουμε τον πιο πάνω ορισμό. Αν το $\mu$ είναι μέτρο πιθανότητας, λέμε ότι η $\Psi$ ισχύει **με πιθανότητα 1** ή **σχεδόν βέβαια**.

**Πρόταση 6.12.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, g : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε:*

*(i) Αν $\mu(\{f \neq g\}) = 0$, τότε $\int f \, \mathrm{d}\mu = \int g \, \mathrm{d}\mu$.*

*(ii) $\int f \, \mathrm{d}\mu = 0$ αν και μόνο αν $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$.*

*(iii) Αν $\int f \, \mathrm{d}\mu < \infty$, τότε $\mu(f = \infty) = 0$.*

*Απόδειξη.* (ii) «$\Rightarrow$» Έστω ότι $\int f \, \mathrm{d}\mu = 0$. Θέτουμε $A_n = \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}$, $n \in \mathbb{N}^+$. Τότε,

$$0 = \int f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_{A_n} f \, \mathrm{d}\mu = \int f \mathbf{1}_{A_n} \, \mathrm{d}\mu \geq \int \frac{1}{n} \mathbf{1}_{A_n} \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{n}\mu(A_n), \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^+.$$

Άρα $\mu(A_n) = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Όμως, $\{f > 0\} = \cup_{n\geq 1} A_n$ και $\mu(\{f > 0\}) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n) = 0$. Συνεπώς, $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$.
«$\Leftarrow$» Αν η $f$ είναι απλή όπως στον Ορισμό 6.1, τότε από την υπόθεση πρέπει $\mu(A_i) = 0$ για κάθε $i$ με $a_i > 0$, και άρα $\int f \,\mathrm{d}\mu = 0$. Στη γενική περίπτωση, αν πάρουμε απλή, μετρήσιμη $s$ με $0 \leq s \leq f$, τότε $\mu(\{s \neq 0\}) \leq \mu(\{f \neq 0\}) = 0$, και όπως δείξαμε πριν, πρέπει να ισχύει $\int s \,\mathrm{d}\mu = 0$. Το συμπέρασμα έπεται.
$(i)$ $f \leq g + (f - g)\mathbf{1}_{f-g>0}$. Άρα

$$\int f \,\mathrm{d}\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\mu + \int (f - g)\mathbf{1}_{f-g>0} \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu.$$

Η ισότητα έπεται από το μέρος $(ii)$ γιατί η $(f - g)\mathbf{1}_{f-g>0}$ είναι μη αρνητική και $\mu(\{(f - g)\mathbf{1}_{f-g>0} \neq 0\}) = 0$. Αλλάζοντας τους ρόλους των $f, g$, παίρνουμε την αντίστροφη ανισότητα και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.
$(iii)$ Η συνάρτηση $s := \infty \mathbf{1}_{f=\infty}$ είναι απλή, μετρήσιμη και $0 \leq s \leq f$. Άρα $\int f \,\mathrm{d}\mu \geq \int s \,\mathrm{d}\mu = \infty \times \mu(f = \infty)$. Αν $\mu(f = \infty) > 0$, τότε θα πρεπε $\int f \,\mathrm{d}\mu = \infty$. Άτοπο. ■

**Παρατήρηση 6.13.** Εύκολα βλέπουμε ότι η ιδιότητα $(i)$ της Πρότασης 6.12 ισχύει και για μετρήσιμες συναρτήσεις με τιμές στο $[-\infty, \infty]$ των οποίων το ολοκλήρωμα ορίζεται.

Στην περίπτωση ενός χώρου πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, η Πρόταση 6.12 παίρνει την εξής μορφή:

**Πρόταση 6.14.** *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $X, Y : \Omega \to [0, \infty]$ τυχαίες μεταβλητές. Τότε*

*(i) Αν $\mathbf{P}(X = Y) = 1$, τότε $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$.*

*(ii) $\mathbf{E}(X) = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{P}(X = 0) = 1$.*

*(iii) Αν $\mathbf{E}(X) < \infty$, τότε $\mathbf{P}(X = \infty) = 0$.*

Καταγράφουμε χωρίς απόδειξη μια χρήσιμη ιδιότητα της μέσης τιμής (Δες Άσκηση 6.9).

**Πρόταση 6.15** (Ανισότητα Jensen)**.** *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}\,|X| < \infty$, και $\Phi : I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση σε ένα διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ με $\mathbf{P}(\{X \in I\}) = 1$ και $\mathbf{E}\,|\Phi(X)| < \infty$. Τότε*

$$\Phi(\mathbf{E}\{X\}) \leq \mathbf{E}\{\Phi(X)\}.$$

**Ορισμός 6.16.** Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}\,|X| < \infty$. Ορίζουμε τη διασπορά $\mathrm{Var}(X)$ της $X$ ως εξής:

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbf{E}(\{X - \mathbf{E}(X)\}^2).$$

Η μέση τιμή $\mathbf{E}(X)$, όπως έχουμε ήδη σημειώσει (Παρατήρηση 6.8), είναι πραγματικός αριθμός λόγω της $\mathbf{E}\,|X| < \infty$. Η διασπορά, όμως, ενδέχεται να παίρνει την τιμή $\infty$. Ένας χρήσιμος τύπος για τη διασπορά, που προκύπτει εύκολα από τον ορισμό της, είναι είναι ο $\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$. Έτσι βλέπουμε ότι αν $\mathbf{E}(X^2) < \infty$, τότε $\mathrm{Var}(X) < \infty$.

Η διασπορά είναι ένα μέτρο της μεταβλητότητας της τυχαίας μεταβλητής γύρω από τη μέση της τιμή. Έτσι, όταν $\mathrm{Var}(X) = 0$, αναμένουμε η $X$ να είναι συγκεντρωμένη στη μέση τιμή. Ισχύει το εξής

$$\mathrm{Var}(X) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P}(X = c) = 1 \tag{6.4}$$

με $c = \mathbf{E}(X)$. Απόδειξη χρειάζεται μόνο η κατεύθυνση $\Rightarrow$. Η $\mathrm{Var}(X) = 0$ σημαίνει ότι η μη αρνητική τυχαία μεταβλητή $\{X - \mathbf{E}(X)\}^2$ έχει μέση τιμή μηδέν. Με βάση την Πρόταση 6.14(ii), η $X - \mathbf{E}(X) = 0$ με πιθανότητα 1, που είναι το ζητούμενο.

Τέλος, δίνουμε δύο σημαντικές ανισότητες διατυπωμένες στη γλώσσα των πιθανοτήτων. Αντίστοιχες ισχύουν και στην περίπτωση μετρήσιμων συναρτήσεων σε τυχόντα χώρο μέτρου. Εκφράζουν το γεγονός ότι η πιθανότητα μια τυχαία μεταβλητή να βρεθεί μακριά από τη μέση της τιμή είναι μικρή.

**Πρόταση 6.17.** *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας. Τότε ισχύουν τα εξής:*

*(i) (Ανισότητα Markov) Αν $X : \Omega \to [0, \infty]$ τυχαία μεταβλητή και $a > 0$, τότε*

$$\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{a}.$$

*(ii) (Ανισότητα Chebyshev) Αν $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}\,|X| < \infty$ και $a > 0$, τότε*

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.$$

*Απόδειξη.* $(i)$ Χρησιμοποιούμε τη μονοτονία της μέσης τιμής. Έχουμε $X \geq a\mathbf{1}_{X\geq a}$. Άρα

$$\mathbf{E}(X) \geq \mathbf{E}(a\mathbf{1}_{X\geq a}) = a\,\mathbf{P}(X \geq a).$$

$(ii)$ Εφαρμόζουμε το $(i)$ στην τυχαία μεταβλητή $|X - \mathbf{E}(X)|^2$. Δηλαδή

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq a) = \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)|^2 \geq a^2) \leq \frac{\mathbf{E}\{|X - \mathbf{E}(X)|^2\}}{a^2} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.$$

■

## 6.5 Οι χώροι $\mathcal{L}^p$ με $p \in [1, \infty)$

**Ορισμός 6.18.** Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $X : \Omega \to [-\infty, \infty]$ τυχαία μεταβλητή και $p \in [1, \infty)$. Ορίζουμε

$$\|X\|_p := \{\,\mathbf{E}(|X|^p)\}^{1/p}$$

και

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) := \{X \,|\, X : \Omega \to [-\infty, \infty] \text{ τυχαία μεταβλητή και } \|X\|_p < \infty\}.$$

Όταν είναι σαφές ποιος είναι ο χώρος $\Omega$ και ποια η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$, θα γράφουμε $\mathcal{L}^p(\mathbf{P})$ αντί $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

**Παρατήρηση 6.19.** Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p \to [0, \infty)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(i) $\|\lambda X\|_p = |\lambda|\|X\|_p$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) $\|X + Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p$.

Έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{L}^p(\mathbf{P})$ είναι διανυσματικός χώρος.

**Πρόταση 6.20.** *(Ανισότητα Cauchy-Schwarz) Έστω $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές στοιχεία του $\mathcal{L}^2$. Τότε $XY \in \mathcal{L}^1$ και*

$$|\,\mathbf{E}(XY)| \leq \|X\|_2\|Y\|_2.$$

*Απόδειξη.* Επειδή $2|XY| \leq X^2 + Y^2$, έπεται ότι $XY \in \mathcal{L}^1$. Έπειτα, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$0 \leq \mathbf{E}\left((\lambda X + Y)^2\right) = \lambda^2\,\mathbf{E}(X^2) + 2\lambda\,\mathbf{E}(XY) + \mathbf{E}(Y^2). \tag{6.5}$$

Η διακρίνουσα της τετραγωνικής μορφή ως προς $\lambda$ στην (6.5) είναι

$$4\,\mathbf{E}(XY)^2 - 4\,\mathbf{E}(X^2)\,\mathbf{E}(Y^2),$$

και, εφόσον η μορφή είναι μη αρνητική για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$|\,\mathbf{E}(XY)| \leq \mathbf{E}(X^2)^{1/2}\,\mathbf{E}(Y^2)^{1/2},$$

το οποίο είναι το ζητούμενο. ■

Γενικότερη της Cauchy-Schwarz είναι η ανισότητα Hölder. Τη διατυπώνουμε χωρίς απόδειξη στην επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 6.21.** *(Ανισότητα Hölder) Έστω $p, q \in (1, \infty)$ με $p^{-1} + q^{-1} = 1$ και $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές με $\|X\|_p < \infty, \|Y\|_q < \infty$. Τότε $XY \in \mathcal{L}^1$ και*

$$|\mathbf{E}(XY)| \leq \|X\|_p \|Y\|_q.$$

**Πρόταση 6.22.** *Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[-\infty, \infty]$. Τότε, για $1 \leq r < s$, ισχύει ότι*

$$\|X\|_r \leq \|X\|_s.$$

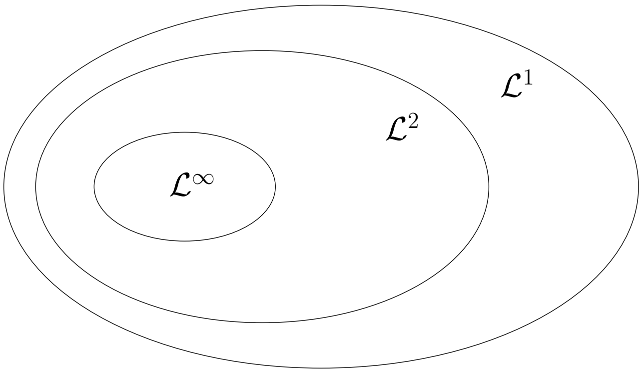
*Απόδειξη.* Είναι συνέπεια της ανισότητας Hölder όπου τη θέση της $X$ έχει η $|X|^r$, την θέση της $Y$ έχει η σταθερή συνάρτηση 1 και $p = s/r$, $q = s/(s-r)$. Τότε,

$$\mathbf{E}\,|X|^r = \mathbf{E}(|X|^r 1) \leq \mathbf{E}(|X|^s)^{r/s}(\mathbf{E}(1^q))^{1/q} = \mathbf{E}(|X|^s)^{r/s},$$

και έτσι προκύπτει το ζητούμενο. ■

Η Πρόταση 6.22 μας λέει ότι αν $1 \leq r < s$, τότε $\mathcal{L}^s(\mathbf{P}) \subset \mathcal{L}^r(\mathbf{P})$ (Σχήμα 6.3). Ο εγκλεισμός αυτός όμως έπεται και πιο εύκολα αν παρατηρήσουμε ότι $|X|^r \leq |X|^s + 1$ (το 1 καλύπτει την περίπτωση που $|X(\omega)| < 1$).

Όταν είναι σαφές ποιο είναι το μέτρο $\mathbf{P}$, τότε γράφουμε $\mathcal{L}^p$ αντί $\mathcal{L}^p(\mathbf{P})$.




Σχήμα 6.3: $\mathcal{L}^s \subset \mathcal{L}^r$ για $1 \leq r < s$.

**Ορισμός 6.23.** Έστω $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές ώστε $\mathbf{E}\,|X|, \mathbf{E}\,|Y| < \infty$ και η $\mathbf{E}(XY)$ ορίζεται (στο $[-\infty, \infty]$). **Συνδιακύμανση** των $X, Y$ ονομάζουμε την ποσότητα

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}\{(X - \mathbf{E}\,X)(Y - \mathbf{E}\,Y)\},$$

η οποία είναι στοιχείο του $[-\infty, \infty]$.

**Πρόταση 6.24.** *Έστω $X, Y \in \mathcal{L}^2$. Τότε*

$$|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}.$$

*Απόδειξη.* Η ανισότητα Caychy-Schwarz δίνει

$$\begin{aligned} |\mathrm{Cov}(X, Y)| &= |\mathbf{E}\{(X - \mathbf{E}\,X)(Y - \mathbf{E}\,Y)\}| \\ &\leq \sqrt{\mathbf{E}\{(X - \mathbf{E}\,X)^2\}}\sqrt{\mathbf{E}\{(Y - \mathbf{E}\,Y)^2\}} = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}. \end{aligned}$$

■

## 6.6 Οι χώροι $\mathcal{L}^0, \mathcal{L}^\infty$

Θέτουμε

$$\mathcal{L}^0 := \{X \mid X : \Omega \to [-\infty, \infty] \text{ είναι τυχαία μεταβλητή}\}.$$

Αυτός ο ορισμός είναι στο πνεύμα του 6.18 αφού η συνθήκη $\mathbf{E}(|X|^0) = 1 < \infty$ ισχύει για όλες τις τυχαίες μεταβλητές.

Μια $X \in \mathcal{L}^0$ λέμε ότι είναι φραγμένη με πιθανότητα 1 αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{P}(|X| \leq M) = 1$. Έπειτα, για κάθε $X \in \mathcal{L}^0$ θέτουμε

$$\begin{aligned} \operatorname{essinf} X &:= \sup\{M \in \mathbb{R} : \mathbf{P}(X \geq M) = 1\} \\ \operatorname{esssup} X &:= \inf\{M \in \mathbb{R} : \mathbf{P}(X \leq M) = 1\} \\ \|X\|_\infty &:= \inf\{M > 0 : \mathbf{P}(|X| \leq M) = 1\} \end{aligned}$$

Οι ποσότητες αυτές ονομάζονται ουσιώδες infimum, ουσιώδες supremum, και άπειρο νόρμα της $X$ αντίστοιχα. Υπενθυμίζουμε ότι $\inf \emptyset = \infty$ και $\sup \emptyset = -\infty$. Τέλος, θέτουμε

$$\mathcal{L}^\infty := \{X \mid X : \Omega \to [-\infty, \infty] \text{ είναι τυχαία μεταβλητή και } \|X\|_\infty < \infty\}.$$

Επειδή μια σταθερή συνάρτηση έχει πεπερασμένη μέση τιμή (το $\mathbf{P}$ είναι πεπερασμένο μέτρο), έχουμε ότι

$$\mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^p$$

για κάθε $1 \leq p < \infty$. Και βέβαια, για τα ίδια $p$, έχουμε $\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^0$.

## 6.7 Τα βασικά οριακά θεωρήματα

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μετρήσιμων συναρτήσεων με τιμές στο $[-\infty, \infty]$ που συγκλίνουν σημειακά σε μια συνάρτηση $f$. Πολλές φορές μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός του ορίου $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$, και μπαίνουμε στον πειρασμό να μαντέψουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu, \tag{6.6}$$

δηλαδή το όριο μπαίνει μέσα στο ολοκλήρωμα. Αυτό όμως δεν γίνεται πάντοτε. Το πρόβλημα αυτό είναι το αντικείμενο των βασικών θεωρημάτων σύγκλισης για το ολοκλήρωμα Lebesque. Τα διατυπώνουμε αλλά παραλείπουμε τις αποδείξεις τους.

**Θεώρημα 6.25** (Θεώρημα μονότονης σύγκλισης)**.** *Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με $f_n : X \to [0, +\infty]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Θέτουμε $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Το όριο $\lim_{n\to\infty} f_n$ υπάρχει γιατί η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα. Και όμοια, το όριο στο αριστερό μέλος της τελευταίας ισότητας υπάρχει γιατί η ακολουθία των ολοκληρωμάτων είναι αύξουσα.

**Θεώρημα 6.26** (Λήμμα Fatou)**.** *Έστω $(f_n)_{n\geq 1}$, με $f_n : X \to [0, \infty]$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε*

$$\int \varliminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

**Θεώρημα 6.27** (Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ σχεδόν παντού και $|f_n(x)| \le g(x)$ για κάθε $x \in X$, όπου $g : X \to [0, \infty]$ είναι μετρήσιμη με $\int g \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Τότε $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$ και*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu. \tag{6.7}$$

Όταν $|f_n| \le g$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, λέμε ότι η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κυριαρχείται από τη συνάρτηση $g$. Η κρίσιμη συνθήκη του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης είναι ότι η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κυριαρχείται από ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Σε ένα χώρο *πεπερασμένου* μέτρου, οι σταθερές συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες. Γιατί μια $g = M$ (όπου $M \in \mathbb{R}$ σταθερά) έχει ολοκλήρωμα $M\mu(X)$, το οποίο είναι πραγματικός αριθμός. Έτσι το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχει την εξής χρήσιμη συνέπεια.

**Θεώρημα 6.28** (Θεώρημα φραγμένης σύγκλισης)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $f_n : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ και $|f_n| \le M$, όπου $M < \infty$ σταθερά. Τότε $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$ και*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

**Αντιπαράδειγμα** [Αποτυχία ισχύος της (6.6)]: Θεωρούμε τον χώρο πιθανότητας $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathbf{P})$, όπου $\mathbf{P}$ είναι το μέτρο Lebesgue περιορισμένο στο $[0, 1]$ (Παράδειγμα 2.10). Θέτουμε

$$X_n(x) = n\mathbf{1}_{(0,1/n]}(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Η $X_n$ είναι απλή τυχαία μεταβλητή, και $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0$. Έχουμε ότι

$$\mathbf{E}(\lim_{n\to\infty} X_n) = \mathbf{E}(0) = 0$$

και

$$\mathbf{E}(X_n) = n\,\mathbf{P}\left((0, 1/n]\right) = n\frac{1}{n} = 1.$$

Άρα $\mathbf{E}(\lim\limits_{n\to\infty} X_n) < \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n)$. Δηλαδή έχουμε γνήσια ανισότητα στο λήμμα Fatou, και το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης δεν εφαρμόζεται. Αυτό δεν μας κάνει εντύπωση γιατί η ακολουθία $X_n$ δεν κυριαρχείται από κάποια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Πράγματι, η μικρότερη $g$ που ικανοποιεί τη $|X_n(x)| \le g(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και $n \ge 1$ είναι η $\sup_{n\ge1} X_n(x) = [1/x]\mathbf{1}_{x\in(0,1]}$ (Άσκηση), της οποίας το ολοκλήρωμα ως προς το μέτρο $\mathbf{P}$ είναι $\infty$.

**Παράδειγμα 6.29** (Το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και ένα ερώτημα απειροστικού λογισμού)**.** Θα υπολογίσουμε το όριο $\lim_{n\to\infty} I_n$ όπου

$$I_n := n^{k+1} \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n x^k \,dx$$

με $k \in (-1, \infty)$. Η αντικατάσταση $y = nx$ δίνει

$$I_n = \int_0^n \left(\frac{n-y}{n+y}\right)^n y^k \,dy = \int_0^\infty \left(\frac{n-y}{n+y}\right)^n y^k \mathbf{1}_{y\in[0,n]} \,dy.$$

Για σταθερό $y > 0$, ο ολοκληρωτέος συγκλίνει στο $e^{-2y} y^k$ αφού

$$\left(\frac{n-y}{n+y}\right)^n \mathbf{1}_{y\in[0,n]} = \left(1 - \frac{2y}{n+y}\right)^n \mathbf{1}_{y\in[0,n]} \to e^{-2y}$$

Επίσης, φράσσουμε τον ολοκληρωτέο ως εξής

$$0 \le \left(\frac{n-y}{n+y}\right)^n y^k \mathbf{1}_{y\in[0,n]} \le e^{-\frac{2yn}{n+y}} y^k \mathbf{1}_{y\in[0,n]} \le e^{-2y} y^k =: g(y).$$

Στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την $1 + x \le e^x$, ενώ στη δεύτερη το ότι $y \in [0, n]$ για τα $y$ που το αριστερό μέλος είναι θετικό. Η $g$ έχει $\int_0^\infty g(x)\,dx < \infty$, οπότε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης εφαρμόζεται και δίνει ότι

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^\infty y^k e^{-2y}\,dy = 2^{-k-1}\Gamma(k+1).$$

Δεδομένου ότι μια σειρά είναι το όριο των μερικών αθροισμάτων της και ότι το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό, τα παραπάνω θεωρήματα δίνουν το εξής πόρισμα.

**Πόρισμα 6.30.** *Έστω $(f_n)_{n\ge1}$, με $f_n : X \to [-\infty, \infty]$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων.*

*(i) (Θεώρημα Beppo-Levi) Αν $f_n$ μη αρνητική για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε*

$$\int \Big(\sum_{n=1}^\infty f_n\Big)\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int f_n\,\mathrm{d}\mu. \tag{6.8}$$

*(ii) Αν οι $f_n$ παίρνουν τιμές στο $[-\infty, \infty]$ και $\sum_{n=1}^\infty \int |f_n|\,\mathrm{d}\mu < \infty$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^\infty f_n$ συγκλίνει σχεδόν παντού σε μια μετρήσιμη συνάρτηση με τιμές στο $\mathbb{R}$, ισχύει η (6.8), και τα δύο μέλη της είναι πραγματικοί αριθμοί.*

*Απόδειξη.* (*i*) Θέτουμε $g_n = \sum_{k=1}^n f_k$ για κάθε $n \ge 1$. Τότε η $(g_n)_{n\ge1}$ είναι αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων και αν $g = \sum_{k=1}^\infty f_k$, ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} g_n = g$. Επίσης, $\int g_n\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^n \int f_k\,\mathrm{d}\mu$ λόγω γραμμικότητας. Το ζητούμενο προκύπτει από το θεώρημα μοτότονης σύγκλισης (Θεώρημα 6.25).

(*ii*) Εφαρμόζουμε το (*i*) για την ακολουθία $(|f_n|)_{n\ge1}$. Τότε

$$\int \Big(\sum_{n=1}^\infty |f_n|\Big)\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int |f_n|\,\mathrm{d}\mu. \tag{6.9}$$

Όμως

$$\Big|\sum_{k=1}^n f_k\Big| \le \sum_{k=1}^\infty |f_k|$$

για κάθε $n \ge 1$ και, από υπόθεση, η $g = \sum_{k=1}^\infty |f_k|$ έχει πεπερασμένο ολοκλήρωμα. Συνεπώς, εφαρμόζοντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης (Θεώρημα 6.27), έχουμε ότι

$$\int \Big(\sum_{n=1}^\infty f_n\Big)\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int f_n\,\mathrm{d}\mu,$$

και από την (6.9) και την Πρόταση 6.12(*iii*), ισχύει ότι η $\sum_{n=1}^\infty f_n$ παίρνει πραγματικές τιμές σχεδόν παντού. ■

**Παρατήρηση 6.31.** Οι σειρές $\sum_{n=1}^\infty f_n$, $\sum_{n=1}^\infty \int f_n\,d\mu$ στο (i) και η $\sum_{n=1}^\infty |f_n|$ στο (ii) συγκλίνουν, με ενδεχόμενη τιμή το $\infty$, γιατί είναι σειρές μη αρνητικών όρων.

**Παράδειγμα 6.32.** (Ορισμός μέτρου μέσω πυκνότητας) Έστω $X : \Omega \to [0, \infty]$ τυχαία μεταβλητή σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Τότε η συνάρτηση $\mathbf{Q} : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ με

$$\mathbf{Q}(A) := \mathbf{E}(X; A) = \int_A X \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}$$

για κάθε $A \in \mathcal{F}$ είναι μέτρο. Επιπλέον, για $A \in \mathcal{F}$, ισχύει ότι αν $\mathbf{P}(A) = 0$, τότε $\mathbf{Q}(A) = 0$.

Πράγματι, η $\mathbf{Q}$ είναι μη αρνητική και $\mathbf{Q}(\emptyset) = \mathbf{E}(X\mathbf{1}_\emptyset) = \mathbf{E}(0) = 0$. Έπειτα, για $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ξένων ανα δύο στοιχείων της $\mathcal{F}$, έχουμε $\mathbf{1}_{\cup_{n=1}^\infty A_n} = \sum_{n=1}^\infty \mathbf{1}_{A_n}$. Συνεπώς

$$\mathbf{Q}(\cup_{n=1}^\infty A_n) = \mathbf{E}\Big(X \sum_{n=1}^\infty \mathbf{1}_{A_n}\Big) = \sum_{n=1}^\infty \mathbf{E}(X\mathbf{1}_{A_n}) = \sum_{n=1}^\infty \mathbf{Q}(A_n).$$

Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιούμε το θεώρημα Beppo-Levi (Πόρισμα 6.30 $(i)$). Τέλος, αν $\mathbf{P}(A) = 0$, τότε $\mathbf{P}(X\mathbf{1}_A = 0) = 1$, και από την Πρόταση 6.14 $(ii)$ έχουμε ότι $\mathbf{Q}(A) = \mathbf{E}(X\mathbf{1}_A) = 0$.

**Παρατήρηση 6.33.** Η τυχαία μεταβλητή $X$ στο Παράδειγμα 6.32 λέγεται **πυκνότητα** του $\mathbf{Q}$ ως προς το μέτρο $\mathbf{P}$ καθώς και **παράγωγος Radon-Nikodym** του $\mathbf{Q}$ ως προς $\mathbf{P}$. Αν επιπλέον $\mathbf{E}(X) = 1$, το $\mathbf{Q}$ είναι μέτρο πιθανότητας στον $(\Omega, \mathcal{F})$.

## Ασκήσεις

**6.1** (Η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού για πιθανότητες) Έστω $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. Τότε,

$$\mathbf{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

**6.2*** Αν $n \geq 1$ και τα $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ ικανοποιούν $\mathbf{P}(A_1) + \cdots + \mathbf{P}(A_n) > k - 1$ για κάποιο θετικό ακέραιο $k$, τότε υπάρχουν $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ με $\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) > 0$.

**6.3** Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Να δείξετε ότι

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k\geq 1} \mathbf{P}(X \geq k).$$

**6.4** Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0, \infty]$. Να δείξετε ότι

$$\sum_{k=1}^\infty \mathbf{P}(X \geq k) \leq \mathbf{E}\, X \leq 1 + \sum_{k=1}^\infty \mathbf{P}(X \geq k).$$

**6.5*** Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0, \infty)$ και $\mathbf{E}(X) < \infty$. Έστω και $c > 1$. Να δείξετε ότι

$$\sum_{k=1}^\infty c^k\, \mathbf{P}(X \geq c^k) < \infty.$$

**6.6** Έστω $X$ μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με $0 < \mathbf{E}\, X < \infty$ και $a \in (0, 1)$. Τότε

(α)

$$\mathbf{P}(X \leq a\, \mathbf{E}\, X) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{(1-a)^2 (\mathbf{E}\, X)^2}.$$

(β)* (Ανισότητα Paley-Zygmund)

$$\mathbf{P}(X > a\, \mathbf{E}\, X) \geq (1-a)^2 \frac{(\mathbf{E}\, X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}.$$

**6.7** Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή και έστω ότι για κάποιο $a > 0$ ισχύει $\mathbf{E}(e^{aX}) < \infty$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $C > 0$ σταθερά ώστε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ να ισχύει $\mathbf{P}(X > t) \leq Ce^{-at}$. Δηλαδή η «ουρά» της $X$ προς τα δεξιά φθίνει γρήγορα, τουλάχιστον με ταχύτητα $e^{-at}$.

**6.8** Έστω $X, Y$ τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $(0, \infty)$ ώστε $XY \geq 1$ παντού. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y) \geq 1.$$

Ειδικότερα

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{X}\right) \geq \frac{1}{\mathbf{E}(X)}.$$

**6.9** (Η ανισότητα Jensen) Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή με τιμές σε ένα διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ και $\phi : I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν οι $\mathbf{E}\,X, \mathbf{E}\{\phi(X)\}$ ορίζονται και είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\phi(\mathbf{E}\,X) \leq \mathbf{E}\{\phi(X)\}.$$

[Υπόδειξη: Έστω $a := \mathbf{E}\,X$. Υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\phi(x) \geq \phi(a) + \lambda(x - a)$ για κάθε $x \in I$ (απειροστικός λογισμός). Θέτουμε όπου $x$ την τ. μ. $X$.]

**6.10** Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0, \infty)$. Τότε

$$(\mathbf{E}\,X)^p \begin{cases} \leq \mathbf{E}(X^p) & \text{αν } p \geq 1, \\ \geq \mathbf{E}(X^p) & \text{αν } 0 \leq p < 1. \end{cases}$$

Αν οι $\mathbf{E}\,X, \mathbf{E}(\log X)$ ορίζονται και είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\log \mathbf{E}\,X \geq \mathbf{E}(\log X).$$

**6.11** Θεωρούμε στον $\Omega = [2, 3]$ το μέτρο Lebesgue $\lambda$, που είναι μέτρο πιθανότητας. Θέτουμε

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \in [2, 3] \backslash \mathbb{N}^+, \\ (-1)^n n & \text{αν } x = 1/n \text{ με } n \in \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι $\inf f = -\infty, \sup f = \infty, \operatorname{essinf} f = 4, \operatorname{esssup} f = 9$.

**6.12** Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \{\mathbf{E}(e^{nX})\}^{1/n} = e^{\operatorname{esssup} X}.$$

**6.13** Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X| > n) = 0$.

**6.14** (Κυριαρχημένη σύγκλιση με υπεραριθμήσιμο σύνολο δεικτών) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και για κάθε $t > 0$ μετρήσιμη συνάρτηση $f_t : X \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το όριο $\lim_{t\to\infty} f_t(x) =: f(x)$ και υπάρχει $g : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμη με $\int g(x)\, d\mu(x) < \infty$ και $|f_t(x)| \leq g(x)$ για κάθε $x \in X$ και $t > 0$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{t\to\infty} \int f_t(x)\, d\mu(x) = \int f(x)\, d\mu(x).$$

**6.15** Έστω $X \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$ και $E_n := \{|X| \geq n\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι $n\,\mathbf{P}(E_n) \to 0$ για $n \to \infty$.

**6.16** Έστω $1 \leq r < s$ και $X \in \mathcal{L}^r$. Θέτουμε $X_n := X\mathbf{1}_{|X|\leq n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Να δειχθεί ότι $X_n \in \mathcal{L}^s$ και $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(|X_n - X|^r) = 0$.

**6.17** Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0, \infty]$. Να δείξετε ότι

(α)

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\, \mathbf{E}(X; X < \varepsilon) = 0,$$

(β)

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M}\, \mathbf{E}(X; X < M) = 0.$$

**6.18*** Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{E}(X^2) = \infty$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{M\to\infty} \frac{\{\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{|X|\leq M})\}^2}{\mathbf{E}(X^2\mathbf{1}_{|X|\leq M})} = 0.$$

# 7

# Κατανομή τυχαίας μεταβλητής και ολοκλήρωση

Με όσα έχουμε δει ως τώρα, η μέση τιμή προσδιορίζεται μόνο μέσω της διαδικασίας της Παραγράφου 6.1, η οποία δεν είναι εύχρηστη γενικά. Από την άλλη, στις στοιχειώδεις πιθανότητες η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής με τιμές στο $\mathbb{R}$, ανάλογα με το είδος της (διακριτή/συνεχής), ορίζεται μέσω ενός αθροίσματος ή ολοκληρώματος. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ανακτήσουμε, ως θεωρήματα, αυτές τις εκφράσεις για τη μέση τιμή.

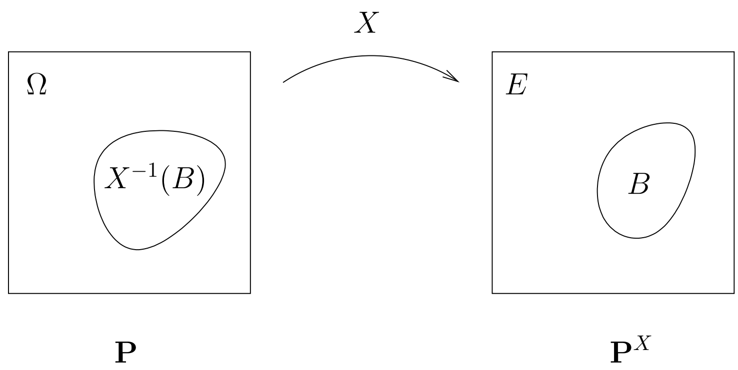
Κεντρική έννοια σε αυτή τη διαδικασία είναι η κατανομή τυχαίας μεταβλητής.

## 7.1 Ο τύπος αλλαγής μεταβλητής

**Ορισμός 7.1.** Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $(E, \mathcal{E})$ μετρήσιμος χώρος, και $X : \Omega \to E$ τυχαία μεταβλητή. Το μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}^X : \mathcal{E} \to [0, 1]$ στον $E$ με

$$\mathbf{P}^X(B) := \mathbf{P}\left(X^{-1}(B)\right) = \mathbf{P}(X \in B)$$

για κάθε $B \in \mathcal{E}$ λέγεται κατανομή της $X$.




Σχήμα 7.1: Η τυχαία μεταβλητή $X$ «μεταφέρει» το μέτρο $\mathbf{P}$ στον χώρο $E$ δίνοντας το μέτρο $\mathbf{P}^X$.

Εύκολα ελέγχει κανείς ότι το $\mathbf{P}^X$ είναι μέτρο πιθανότητας στον $(E, \mathcal{E})$. Το $\mathbf{P}^X$ λέγεται και εικόνα του $\mathbf{P}$ μέσω της $X$.

Η επόμενη πρόταση μεταφέρει τον υπολογισμό μιας μέσης τιμής από τον $\Omega$ στον $E$.

**Πρόταση 7.2.** *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $(E, \mathcal{E})$ μετρήσιμος χώρος, και $X : \Omega \to E$ τυχαία μεταβλητή με κατανομή $\mathbf{P}^X$. Για κάθε $h : E \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση ισχύει*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\{h(X)\} = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h). \tag{7.1}$$

*Επίσης, αν η $h : E \to [-\infty, \infty]$ είναι μετρήσιμη, τότε ή και τα δύο μέλη της (7.1) ορίζονται και είναι ίσα ή και τα δύο δεν ορίζονται.*

Το αριστερό μέλος της (7.1) είναι η μέση τιμή της $h \circ X$ στο $\Omega$ ως προς το μέτρο $\mathbf{P}$ και το δεξί μέλος της (7.1) είναι η μέση τιμή της $h$ στο $E$ ως προς το μέτρο $\mathbf{P}^X$. Αυτό γίνεται ακόμη πιο καθαρό αν τη γράψουμε ως

$$\int h(X(\omega))\, d\,\mathbf{P}(\omega) = \int h(x)\, d\,\mathbf{P}^X(x).$$

*Απόδειξη.* Βήμα 1. Αν $h = \mathbf{1}_A$ με $A \in \mathcal{E}$, τότε $h(X(\omega)) = \mathbf{1}_{\{\omega : X(\omega)\in A\}}$. Δηλαδή, $h(X) = \mathbf{1}_{X^{-1}(A)}$ με $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$. Έχουμε λοιπόν

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\mathbf{1}_A(X)) = \mathbf{P}(X^{-1}(A)) = \mathbf{P}^X(A) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(\mathbf{1}_A),$$

άρα η (7.1) ισχύει.

Βήμα 2. Αν η $h$ είναι μη αρνητική απλή, τότε $h = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$, με $a_i \in [0,\infty]$ και $A_i \in \mathcal{E}$ για κάθε $i \in \{1,2,\dots,n\}$. Τότε

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}\Big(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}(X)\Big) = \sum_{i=1}^n a_i\, \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(\mathbf{1}_{A_i}(X)) = \sum_{i=1}^n a_i\, \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(\mathbf{1}_{A_i}) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}\Big(\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}\Big) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h).$$

Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το προηγούμενο βήμα.

Βήμα 3. Αν $h \geq 0$ μετρήσιμη, τότε από την Πρόταση 5.12 υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ απλών συναρτήσεων με $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{E}$. Τότε $\lim_{n\to\infty} h_n(X(\omega)) = h(X(\omega))$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και από το προηγούμενο βήμα

$$\mathbf{E}(h_n(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h_n) \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Για $n \to \infty$, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης (Θεώρημα 6.25) έχουμε

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h(X)) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h_n(X)) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h_n) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h).$$

Βήμα 4. Αν $h$ μετρήσιμη συνάρτηση με τιμές στο $[-\infty,\infty]$, τότε τη γράφουμε ως $h = h^+ - h^-$. Από το προηγούμενο βήμα,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h^+(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h^+), \tag{7.2}$$
$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h^-(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h^-). \tag{7.3}$$

Το αριστερό μέλος της (7.1) δεν ορίζεται αν και μόνο αν το αριστερό μέλος των (7.2), (7.3) ισούται με $\infty$, ενώ το δεξί μέλος της (7.1) δεν ορίζεται αν και μόνο αν το δεξί μέλος των (7.2), (7.3) ισούται με $\infty$. Άρα ή και τα δύο μέλη της (7.1) ορίζονται ή και τα δύο δεν ορίζονται.

Τώρα, στην περίπτωση που και τα δύο μέλη της (7.1) ορίζονται, οι (7.2), (7.3) δίνουν

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h^+(X)) - \mathbf{E}_{\mathbf{P}}(h^-(X)) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h^+) - \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h^-) = \mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h).$$

■

Η τεχνική απόδειξης της προηγούμενης πρότασης είναι πολύ συνηθισμένη στη Θεωρία Μέτρου. Θα την ονομάζουμε στο εξής Τυπική Μηχανή.

**Παρατήρηση 7.3. Η τυπική μηχανή**. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ χώρος μέτρου και ότι θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια πρόταση $Q(f)$ ισχύει για όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to [-\infty,\infty]$ ώστε το $\int f\,d\mu$ να ορίζεται. Ακολουθούμε τα εξής βήματα.

(i) Δείχνουμε την $Q$ για $f = \mathbf{1}_A$ όπου $A \in \mathcal{A}$.

(ii) Δείχνουμε την $Q$ για $f \geq 0$ μετρήσιμη, απλή.

(iii) Δείχνουμε την $Q$ για $f \geq 0$ μετρήσιμη.

(iv) Δείχνουμε την $Q$ για $f$ με $\int |f|\, d\mu < \infty$.

Συνήθως συμβαίνει το εξής: Το (i) είναι συνέπεια ορισμού. Το (ii) έπεται από το (i) και τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος. Το (iii) έπεται από το (ii) και το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, εφόσον γράψουμε $f = \lim s_n$ για κατάλληλη αύξουσα ακολουθία απλών μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Το (iv) έπεται από το (iii) και τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος εφόσον γράψουμε $f = f^+ - f^-$.

Ακόμη τρεις εφαρμογές της Τυπικής Μηχανής θα δούμε στις αποδείξεις της Πρότασης 7.8 και του Θεωρήματος 10.9 καθώς και στην Άσκηση 7.3.

**Παρατήρηση 7.4. Ισοκατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές**. Αν $X : \Omega_1 \to \mathbb{R}, Y : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ είναι δύο τυχαίες μεταβλητές με την ίδια κατανομή (τα πεδία ορισμού τους, $\Omega_1, \Omega_2$, ενδέχεται να είναι διαφορετικά), τότε για οποιοδήποτε σύνολο Borel $A$ έχουμε $\mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{P}(Y \in A)$. Αυτό γιατί η πρώτη πιθανότητα ισούται με $\mathbf{P}^X(A)$, ενώ η δεύτερη με $\mathbf{P}^Y(A)$ και $\mathbf{P}^X = \mathbf{P}^Y$. Και όμοια, για οποιαδήποτε μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $\mathbf{E}(h(X))$ να ορίζεται, ισχύει $\mathbf{E}(h(X)) = \mathbf{E}(h(Y))$. Γιατί και οι δύο μέσες τιμές μπορούν να εκφραστούν (λόγω της παραπάνω πρότασης) μέσω των κατανομών $\mathbf{P}^X, \mathbf{P}^Y$ οι οποίες ταυτίζονται. Για παράδειγμα θα ισχύει $\mathbf{E}\, X^k = \mathbf{E}\, Y^k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ εφόσον οι ποσότητες αυτές ορίζονται.

Χοντρικά, σε οποιονδήποτε υπολογισμό εμπλέκεται η $X$ μπορούμε να την αντικαταστήσουμε με την $Y$. Η δικαιολόγηση γίνεται με χρήση της πιο πάνω πρότασης. Δες όμως και την Παρατήρηση 14.7.

Έτσι, σχεδόν για όλα τα προβλήματα πιθανοτήτων, αυτό που μας ενδιαφέρει σε μια τυχαία μεταβλητή είναι μόνο η κατανομή της ενώ ο χώρος πιθανότητας στον οποίο ορίζεται είναι εντελώς αδιάφορος.

Στην ειδική περίπτωση δύο τυχαίων μεταβλητών $X, Y : \Omega \to E$ (δηλαδή ορισμένων στον ίδιο χώρο πιθανότητας) με $\mathbf{P}(X = Y) = 1$, οι $X, Y$ είναι ισοκατανεμημένες γιατί, για οποιδήποτε μετρησιμο υποσύνολο $A$ του $E$, οι τυχαίες μεταβλητές $\mathbf{1}_A(X), \mathbf{1}_A(Y)$ είναι ίσες με πιθανότητα 1. Άρα με βάση την Πρόταση 6.14,

$$\mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A(X)) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A(Y)) = \mathbf{P}(Y \in A)$$

**Ορολογία**: Δύο τυχαίες μεταβλητές που παίρνουν τιμές σε κοινό μετρήσιμο χώρο $(E, \mathcal{E})$ λέγονται **ισόνομες**, ή και **ισοκατανεμημένες**, αν έχουν την ίδια κατανομή. Δηλαδή τα μέτρα $\mathbf{P}^X, \mathbf{P}^Y$ στον $(E, \mathcal{E})$ ταυτίζονται.

## 7.2 Κατανομές στο $\mathbb{R}$ με πυκνότητα

Η Πρόταση 7.2 μας ενδιαφέρει κυρίως στην περίπτωση όπου $E = \mathbb{R}$ και η κατανομή της $X$ προκύπτει από πυκνότητα. Ο επόμενος ορισμός γενικεύει την έννοια της πυκνότητας, όπως αυτή δόθηκε στο Παράδειγμα 4.13. Πλέον η πυκνότητα δεν είναι απαραίτητο να είναι Riemann-ολοκληρώσιμη.

**Ορισμός 7.5.** Έστω $\mathbf{P}$ μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$, $\lambda$ το μέτρο Lebesgue (Παράδειγμα 2.4), και $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ Borel- μετρήσιμη συνάρτηση. Η $f$ λέγεται **πυκνότητα** του $\mathbf{P}$ αν

$$\mathbf{P}(A) = \int_A f(x)\, \mathrm{d}\lambda(x) \quad \text{για κάθε } A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}). \tag{7.4}$$

Η πυκνότητα ενός μέτρου (αν αυτό έχει) δεν είναι μοναδική. Γιατί αν ένα μέτρο $\mathbf{P}$ έχει πυκνότητα $f$, τότε αλλάζοντας την $f$ σε ένα σύνολο Borel που έχει μέτρο Lebesgue μηδέν, παίρνουμε μια νέα συνάρτηση $\tilde{f}$, η οποία είναι και αυτή πυκνότητα του $\mathbf{P}$. Αυτό έπεται από τον ορισμό της πυκνότητας και το Θεώρημα 6.12(i). Όμως ισχύει το εξής.

**Πρόταση 7.6.** *Αν δύο Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις $f_1, f_2$ είναι πυκνότητες για το ίδιο μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στο $\mathbb{R}$, τότε $\lambda(\{f_1 \neq f_2\}) = 0$.*

*Απόδειξη.* Έστω το σύνολο Borel $A := \{f_1 - f_2 > 0\}$. Η $\mathbf{P}(A) = \int_A f_1 d\lambda = \int_A f_2 d\lambda$ δίνει

$$0 = \int_A (f_1 - f_2)\, d\lambda = \int (f_1 - f_2)\mathbf{1}_A\, d\lambda$$

Ισχύει $(f_1 - f_2)\mathbf{1}_A \geq 0$ και έτσι η Πρόταση 6.12(ii) δίνει ότι $\lambda((f_1 - f_2)\mathbf{1}_A \neq 0) = 0$. Όμως $\{(f_1 - f_2)\mathbf{1}_A \neq 0\} = A$. Επομένως $\lambda(\{f_1 > f_2\}) = 0$. Αντιστρέφοντας τους ρόλους των $f_1, f_2$, παίρνουμε $\lambda(\{f_1 < f_2\}) = 0$ και έτσι το ζητούμενο. ■

Συνδυάζοντας αυτή την πρόταση με το Θεώρημα 6.12(i), συμπεραίνουμε ότι για υπολογισμούς ολοκληρωμάτων ως προς το μέτρο $\lambda$ που εμπλέκουν μια πυκνότητα του $\mathbf{P}$, οποιαδήποτε άλλη πυκνότητα του $\mathbf{P}$ δίνει το ίδιο αποτέλεσμα και επομένως θεωρούμε την πυκνότητα ουσιαστικά μοναδική.

Η σχέση (7.4) για $A = \mathbb{R}$ δίνει ότι $\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = 1$. Τώρα, αν έχουμε μια $f : [0, 1] \to [0, \infty]$ που είναι Borel-μετρήσιμη με $\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = 1$, τότε είναι ευκολο να δούμε ότι η (7.4) ορίζει ένα μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Άρα πυκνότητες κατανομών στο $\mathbb{R}$ είναι ακριβώς οι μη αρνητικές Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ με ολοκλήρωμα 1 ως προς το μέτρο Lebesgue.

**Ορισμός 7.7.** Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή, και $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ Borel-μετρήσιμη συνάρτηση. Λέμε ότι η $f$ είναι μια **πυκνότητα** της τυχαίας μεταβλητής $X$ αν είναι πυκνότητα της κατανομής $\mathbf{P}^X$ της $X$.

Επιστρέφουμε στην ειδική περίπτωση της Πρότασης 7.2 όπου $E = \mathbb{R}$ και η $X$ έχει πυκνότητα.

**Πρόταση 7.8.** *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$. Αν η $h : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ είναι μετρήσιμη, τότε*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\{h(X)\} = \int h(x)f(x)\,\mathrm{d}x \tag{7.5}$$

*όποτε κάποια από τις δύο ποσότητες ορίζεται (Δηλαδή τότε ορίζεται και η άλλη και είναι ίσες).*

Το αριστερό μέλος της (7.5), από την Πρόταση 7.2, ισούται με $\mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h)$ και αυτό θα δείξουμε στην απόδειξη ότι ισούται με το δεξί μέλος. Έτσι ο υπολογισμός της μέσης τιμής $\mathbf{E}_{\mathbf{P}}\{h(X)\}$ στο χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ανάγεται αρχικά σε υπολογισμό στο χώρο $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathbf{P}^X)$ και τελικά σε ένα συνηθισμένο ολοκλήρωμα μιας μεταβλητής. Το δεξί μέλος της (7.5) είναι ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζαμε τη μέση τιμή $\mathbf{E}\{h(X)\}$ για τυχαίες μεταβλητές $X$ με πυκνότητα στις στοιχειώδεις πιθανότητες.

*Απόδειξη.* Θα δείξουμε ότι το δεξί μέλος της (7.5) ισούται επίσης με $\mathbf{E}_{\mathbf{P}^X}(h)$. Χρησιμοποιούμε την τυπική μηχανή (Παρατήρηση 7.3).

Αν $h = \mathbf{1}_A$ με $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, τότε

$$\int h\,\mathrm{d}\mathbf{P}^X = \int \mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mathbf{P}^X = \mathbf{P}^X(A) = \mathbf{P}(X \in A) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathbf{1}_A(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \int h(x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Η τρίτη ισότητα είναι ο ορισμός της κατανομής $\mathbf{P}^X$. Η τέταρτη είναι ο ορισμός της πυκνότητας.

Αν $h \geq 0$ απλή μετρήσιμη, τότε λόγω γραμμικότητας, από τα προηγούμενα προκύπτει το ζητούμενο.

Αν $h \geq 0$ μετρήσιμη, τότε από την Πρόταση 5.12 υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μη αρνητικών, απλών, μετρήσιμων συναρτήσεων με $\lim_{n\to\infty} h_n = h$. Άρα, σε συνδυασμό με το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, έχουμε

$$\int h\,\mathrm{d}\mathbf{P}^X = \lim_{n\to\infty} \int h_n\,\mathrm{d}\mathbf{P}^X = \lim_{n\to\infty} \int h_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \int h(x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Τέλος, αν $h$ μετρήσιμη ώστε ένα από τα δύο μέλη της (7.5) να ορίζεται, από τα προηγούμενα έχουμε

$$\int h^+ \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^X = \int h^+(x)f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int h^- \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^X = \int h^-(x)f(x)\,\mathrm{d}x,$$

και επομένως, αφού $h = h^+ - h^-$, έχουμε

$$\int h\,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^X = \int h^+ \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^X - \int h^- \,\mathrm{d}\,\mathbf{P}^X = \int h^+(x)f(x)\,\mathrm{d}x - \int h^-(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \int h(x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Από την υπόθεση, δεν υπάρχει κάποιο από τα μέλη των ισοτήτων στην τελευταία γραμμή που να δίνει τη μορφή $\infty - \infty$. ■

**Παράδειγμα 7.9.** Έστω $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η $\mathbf{E}(X)$ δεν ορίζεται. Πράγματι, από την Πρόταση 7.8, για τη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(a) = a^+$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X^+) = \mathbf{E}(h(X)) &= \int h(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \int x^+ f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty x\frac{1}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \ge \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &\ge \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_1^\infty \frac{1}{x} \\ &= \infty.\end{aligned}$$

Όμοια, $\mathbf{E}(X^-) = \infty$.

## 7.3 Διακριτές κατανομές

**Διακριτή κατανομή** σε ένα σύνολο $E$ λέμε ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$ στον μετρήσιμο χώρο $(E, \mathscr{P}(E))$ για το οποίο υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύνολο $S \subset E$ ώστε $\mathbf{P}(S) = 1$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathbf{P}(\{x\}) > 0$ για κάθε $x \in S$, αλλιώς αντικαθιστούμε το $S$ με το $\hat{S} = \{x \in S : \mathbf{P}(\{x\}) > 0\}$. Για $A \subset S$, γράφουμε $A = \cup_{x\in A}\{x\}$, και επειδή το $A$ είναι αριθμήσιμο, ισχύει

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{x\in A} \mathbf{P}(\{x\}). \tag{7.6}$$

Το $\mathbf{P}$ δίνει μάζα $\mathbf{P}(\{x\})$ σε κάθε σημείο $x \in S$ και μάζα μηδέν στο $E\backslash S$. Έτσι, για κάθε $A \subset E$ έχουμε $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap S)$ και

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{x\in A} \mathbf{P}(\{x\}). \tag{7.7}$$

Το άθροισμα στο δεξί μέλος έχει αριθμήσιμο πλήθος μη μηδενικών όρων. Αντιστοιχούν στα σημεία του $A \cap S$.

Η ολοκλήρωση ως προς το $\mathbf{P}$ είναι απλή υπόθεση. Έχουμε το εξής.

**Πρόταση 7.10.** *Έστω $\mathbf{P}$ διακριτό μέτρο πιθανότητας στο $E$. Τότε*

$$\int h(x)\,d\,\mathbf{P}(x) = \sum_{x\in E} h(x)\,\mathbf{P}(\{x\}) \tag{7.8}$$

*για κάθε $h : E \to [-\infty, \infty]$. Δηλαδή για κάθε τέτοια $h$ ή και τα δύο μέλη ορίζονται και ισούνται ή και τα δύο δεν ορίζονται.*

Δεν έχουμε κάποια απαίτηση μετρησιμότητας από την $h$ αφού η σ-άλγεβρα είναι η $\mathscr{P}(E)$.

*Απόδειξη.* Αν $h = \mathbf{1}_A$ με $A \subset E$, τότε η (7.8) είναι η (7.7). Αν $h \geq 0$ απλή, όπως στο δεξί μέλος της (5.3), τότε

$$\begin{aligned}\int h(x)\, d\,\mathbf{P}(x) &= \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathbf{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{x\in A_i} \mathbf{P}(\{x\}) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathbf{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{x\in A_i} h(x)\,\mathbf{P}(\{x\})\\ &= \sum_{x\in E} h(x)\,\mathbf{P}(\{x\}).\end{aligned}$$

Αν το $S$ είναι πεπερασμένο, η απόδειξη τελείωσε. Αν είναι άπειρο αριθμήσιμο, θεωρούμε $(s_n)_{n\geq 1}$ μια αρίθμηση του. Για $h : E \to [0, \infty]$ και κάθε $n \geq 1$ θέτουμε $h_n = \sum_{k=1}^{n} h(s_k)\mathbf{1}_{\{s_k\}}$. Η $h_n$ είναι απλή με $0 \leq h_n \leq h$ και η ακολουθία $(h_n)_{n\geq 1}$ είναι αύξουσα και συγκλίνει στην $h$. Άρα, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int h(x)\, d\,\mathbf{P}(x) = \lim_{n\to\infty} \int h_n(x)\, d\,\mathbf{P}(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} h(s_k)\,\mathbf{P}(\{s_k\}) = \sum_{x\in S} h(x)\,\mathbf{P}(\{x\}) = \sum_{x\in E} h(x)\,\mathbf{P}(\{x\}).$$

Η περίπτωση που η $h$ παίρνει τιμές στο $[-\infty, \infty]$ αντιμετωπίζεται όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 7.8. ■

**Διακριτή τυχαία μεταβλητή** στο $E$ λέμε μια τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to E$ της οποίας η εικόνα, $S := X(\Omega)$, είναι αριθμήσιμο σύνολο. Η κατανομή της, $\mathbf{P}^X$, είναι μια διακριτή κατανομή αφού $\mathbf{P}^X(S) = 1$. Ισχύει

$$\mathbf{E}\{h(X)\} = \sum_{x\in E} h(x)\,\mathbf{P}(X = x) \tag{7.9}$$

για όλες τις $h : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ για τις οποίες κάποιο από τα δύο μέλη της ισότητας έχει νόημα. Αυτό προκύπτει από την (7.1) και την (7.8) εφαρμοσμένη στο μέτρο $\mathbf{P}^X$ το οποίο έχει $\mathbf{P}^X(\{x\}) = \mathbf{P}(X = x)$ για κάθε $x \in E$. Ονομάζουμε τη συνάρτηση $f : E \to [0, 1]$ με $f(x) := \mathbf{P}(X = x)$ *συνάρτηση πιθανότητας* της $X$.

Ο τύπος (7.9) είναι γνωστός από τις στοιχειώδεις πιθανότητες.

## 7.4 Είδη κατανομών στο $\mathbb{R}$

Ανάμεσα σε όλες τις κατανομές στο $\mathbb{R}$ ξεχωρίζουμε τα εξής δύο είδη:

(i) Διακριτές.

(ii) Συνεχείς.

Ορίσαμε τις διακριτές σε γενικότερο πλαίσιο στην προηγούμενη παράγραφο. Έπειτα, λέμε μια κατανομή $\nu$ **συνεχή** αν η συνάρτηση κατανομής της, $F(x) := \nu((-\infty, x])$, είναι συνεχής συνάρτηση. Αυτό ισοδυναμεί με $\nu(\{x\}) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ [Άσκηση 4.3(α)], δηλαδή η κατανομή $\nu$ δεν έχει άτομα.

Έπειτα, ανάμεσα στις συνεχείς κατανομές ξεχωρίζουμε τα εξής δύο είδη:

(i) Απολύτως συνεχείς.

(ii) Ιδιάζουσες.

**Απολύτως συνεχείς** λέμε αυτές που έχουν πυκνότητα. **Ιδιάζουσες** λέμε αυτές που έχουν στήριγμα ένα σύνολο με μέτρο Lebesgue 0. Μια ισοδύναμη περιγραφή για τις ιδιάζουσες είναι αυτές των οποίων η συνάρτηση κατανομής, $F$, είναι συνεχής με παράγωγο $F'(x) = 0$, $\lambda$-σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$. Κατασκευή τέτοιας κατανομής γίνεται στην Άσκηση 7.9.

Αν $\nu_1, \nu_2$ είναι κατανομές που η πρώτη είναι διακριτή και η δεύτερη συνεχής, τότε η $(\nu_1 + \nu_2)/2$ είναι κατανομή που δεν είναι ούτε διακριτή ούτε συνεχής. Κάθε κατανομή έχει μια τέτοια ανάλυση σε κυρτό συνδυασμό κατανομών από τα «καθαρά» είδη.

**Θεώρημα 7.11.** *Αν $\mu$ είναι κατανομή στο $\mathbb{R}$, τότε γράφεται ως κυρτός συνδυασμός τριών κατανομών $\mu_d, \mu_{ac}, \mu_s$ με τη $\mu_d$ διακριτή, τη $\mu_{ac}$ απολύτως συνεχή, και τη $\mu_s$ ιδιάζουσα.*

Δηλαδή υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, 1]$ με $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ και $\mu_d, \mu_{\mathrm{ac}}, \mu_s$ όπως στην εκφώνηση ώστε

$$\mu = \lambda_1 \mu_d + \lambda_2 \mu_{ac} + \lambda_2 \mu_s.$$

Τα $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ καθορίζονται μοναδικά και κάθε κατανομή στο δεξί μέλος με μη μηδενικό συντελεστή καθορίζεται μοναδικά. Για την απόδειξη του θεωρήματος απαιτούνται προχωρημένες γνώσεις της θεωρίας παραγώγισης συναρτήσεων. Μπορεί να τη δει κανείς, για παράδειγμα, στο Παπαδάτος Ν. (2006), Παράγραφος 4.3.
Κατανομές που στην ανάλυσή τους έχουν τουλάχιστον δύο από τα $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ διαφορετικά από το 0 τις λέμε **μεικτές**.

Αντίστοιχα, σε μια τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to \mathbb{R}$ αποδίδουμε το χαρακτηρισμό διακριτή, συνεχής, απολύτως συνεχής, ιδιάζουσα, ή μεικτή, ανάλογα με το τι είναι η κατανομή της. Ωστόσο, εδώ η χρήση του όρου «συνεχής» είναι καταχρηστική γιατί αποκαλώντας τη $X$ συνεχή (ως τ.μ.) δεν σημαίνει ότι είναι συνεχής συνάρτηση. Μάλιστα ενδέχεται να μην έχει νόημα να εξετάσουμε αν η $X$ είναι συνεχής ως συνάρτηση γιατί ο $\Omega$ δεν έχει απαραίτητα δομή τοπολογικού χώρου.

## 7.5 Ο μετασχηματισμός ποσοστημορίων*

Έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις (i)-(iii) της Πρότασης 4.8. Ορίζουμε τη συνάρτηση $G : (0, 1) \to \mathbb{R}$ με

$$G(u) := \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < u\}. \tag{7.10}$$

Η $G$ λέγεται **μετασχηματισμός ποσοστημορίων** της $F$. Όταν η $F$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, τότε η $G$ είναι η αντίστροφη, $F^{-1}$, της $F$. Η $G$ είναι αύξουσα, και για $u \in (0, 1), z \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$G(u) \le z \Leftrightarrow u \le F(z) \tag{7.11}$$

Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση. Και για τις δύο κατευθύνσεις χρησιμοποιούμε το ότι η $F$ είναι αύξουσα, ενώ για την κατεύθυνση $\Rightarrow$ χρησιμοποιούμε επιπλέον το ότι η $F$ είναι δεξιά συνεχής.
Η $G$ ως αύξουσα είναι μετρήσιμη (Άσκηση 5.5). Χρησιμοποιώντας την θα δείξουμε το δύσκολο κομμάτι του Θεωρήματος 4.12.

**Απόδειξη του Θεωρήματος 4.12**: Έστω $F$ που ικανοποιεί τα $(i)$, $(ii)$ και $(iii)$ της Πρότασης 4.8. Θέτουμε $\mathbf{P} : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ με

$$\mathbf{P}(A) := \lambda(G^{-1}(A))$$

όπου $\lambda$ είναι το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$. Ο ορισμός είναι καλός γιατί η $G$ είναι μετρήσιμη.
Ισχυρισμός 1: Το $\mathbf{P}$ είναι μέτρο πιθανότητας.
Το ότι είναι μέτρο είναι απλό. Για το ότι είναι μέτρο πιθανότητας, υπολογίζουμε

$$\mathbf{P}(\mathbb{R}) = \lambda(G^{-1}(\mathbb{R})) = \lambda((0, 1)) = 1.$$

Ισχυρισμός 2: Το $\mathbf{P}$ έχει συνάρτηση κατανομής $F$.
Πράγματι. Γιατί για $x \in \mathbb{R}$, χρησιμοποιώντας την (7.11), έχουμε

$$G^{-1}((-\infty, x]) = \{u \in (0, 1) : G(u) \le x\} = \{u \in (0, 1) : u \le F(x)\} = (0, F(x)],$$

οπότε $\mathbf{P}((-\infty, x]) = \lambda((0, F(x)]) = F(x)$. ■

Παράφραση της ιδέας της προηγούμενης απόδειξης, με όρους τυχαίων μεταβλητών, είναι η εξής πρόταση.

**Πρόταση 7.12.** *Έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις (i)-(iii) της Πρότασης 4.8, $G$ όπως στην (7.10), και $U$ τυχαία μεταβλητή με κατανομή την ομοιόμορφη στο $(0, 1)$. Τότε η $X := G(U)$ έχει συνάρτηση κατανομής $F$.*

*Απόδειξη.* Έχουμε

$$\mathbf{P}(G(U) \le x) = \mathbf{P}(U \le F(x)) = F(x).$$

Στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την (7.11). Στη δεύτερη ότι $F(x) \in [0, 1]$ και ότι η $U$ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$. ■

Η πρόταση δίνει μια μέθοδο προσομοίωσης τυχαίων μεταβλητών. Αν έχουμε ένα μηχανισμό που παράγει ομοιόμορφες τυχαίες μεταβλητές, τότε μπορούμε να παραγάγουμε και οποιαδήποτε άλλη τυχαία μεταβλητή για την οποία είναι εύκολο να υπολογίσουμε τη συνάρτηση $G$ που αντιστοιχεί στη συνάρτηση κατανομής της.

**Παράδειγμα 7.13.** Η συνάρτηση κατανομής της κατανομής $\exp(2)$ είναι $F(x) = (1 - e^{-2x})\mathbf{1}_{x \ge 0}$.

$$G(y) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\log(1-y) & \text{αν } y \in (0,1], \\ -\infty & \text{αν } y = 0. \end{cases}$$

Άρα με βάση την προηγούμενη πρόταση, έχουμε ότι, αν η $U$ έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$, τότε η $-(1/2)\log(1 - U)$ ακολουθεί την $\exp(2)$.

## Ασκήσεις

**7.1** (Τυχαία μεταβλητή με δεδομένη κατανομή) Έστω $(E, \mathcal{E})$ μετρήσιμος χώρος και $\nu$ μέτρο πιθανότητας σε αυτόν. Να κατασκευαστεί χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to E$ έτσι ώστε η κατανομή της $X$ να είναι $\nu$.
[Υπόδειξη: Παίρνουμε $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = (E, \mathcal{E}, \nu)$.]

**7.2** Να δειχθεί ότι οι μέσες τιμές στην ισότητα (7.1) ισούνται επίσης με

$$\int_{\bar{\mathbb{R}}} t \, d\,\mathbf{P}^{h(X)}(t).$$

**7.3** Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας και $X$, $\mathbf{Q}$ όπως στο Παράδειγμα 6.32. Αν $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή, να δείξετε ότι

$$\int Y \, d\mathbf{Q} = \mathbf{E_P}(YX)$$

για $Y \ge 0$ και για $Y$ με $\mathbf{E_P}(|Y|X) < \infty$.

**7.4** Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή με κατανομή την κανονική $N(0, 1)$. Για κάθε $x > 0$ να δειχθεί ότι

$$\frac{x}{x^2+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \le \mathbf{P}(X > x) \le \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}. \tag{7.12}$$

Δηλαδή, για μεγάλο $x$, έχουμε $\mathbf{P}(X > x) \sim cx^{-1}e^{-x^2/2}$ με $c = 1/\sqrt{2\pi}$.

**7.5** Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ και πυκνότητα άρτια συνάρτηση. Να δειχθεί ότι
(α) $\mathbf{E}\{h(X)\} = 2\,\mathbf{E}\{h(X)\mathbf{1}_{X>0}\}$ για κάθε $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη άρτια συνάρτηση με $\mathbf{E}\,|h(X)| < \infty$.
(β) $\mathbf{E}\{h(X)\} = 0$ για κάθε $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη περιττή συνάρτηση με $\mathbf{E}\,|h(X)| < \infty$.

**7.6** Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ και πυκνότητα $f$. Να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(f(Y) = 0) = 0$.

**7.7** **Διάμεσο** ενός μέτρου πιθανότητας $\nu$ στο $\mathbb{R}$ λέμε οποιονδήποτε αριθμό $m$ ικανοποιεί τις

$$\nu((-\infty, m]) \ge \frac{1}{2}, \nu([m, \infty)) \ge \frac{1}{2}.$$

Διάμεσο μιας τυχαίας μεταβλητής με τιμές στο $\mathbb{R}$ λέμε οποιονδήποτε διάμεσο της κατανομής της.
(α) Να δειχθεί ότι κάθε μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον έναν διάμεσο και να δοθεί παράδειγμα όπου ο διάμεσος δεν είναι μοναδικός.
(β) Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή της οποίας η συνάρτηση κατανομής είναι συνεχής. Να δειχθεί ότι οι διάμεσοι της $X$ είναι ακριβώς τα σημεία στα οποία παίρνει το ολικό της ελάχιστο η συνάρτηση $f(a) := \mathbf{E}\,|X - a|$.
(γ) Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή $\mu$, διάμεσο $m$, και διασπορά $\sigma^2$. Να δειχθεί ότι

$$|m - \mu| \le \sigma$$

και η ισότητα ισχύει μόνο όταν η $X$ είναι σταθερή.

**7.8** Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}(X^2) < \infty$. Να δειχθεί ότι η μέση τιμή $\mathbf{E}\,X$ είναι το μοναδικό σημείο που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση $g(a) = \mathbf{E}\{(X - a)^2\}$.

**7.9** (Η κατανομή Cantor) Η συνάρτηση Cantor $\phi : [0,1] \to [0,1]$ ορίζεται ως εξής. Αν έχουν οριστεί οι τιμές της $\phi$ στα άκρα ενός διαστήματος $I = [a,b] \subset [0,1]$, τότε το να εφαρμόσουμε τη διαδικασίας $T$ στη $\phi$ στο $I$ σημαίνει να χωρίσουμε το $I$ σε τρία διαδοχικά διαστήματα μήκους $|I|/3$ το καθένα και στην κλειστότητα του μεσαίου διαστήματος να ορίσουμε τη $\phi$ να παίρνει την τιμή $(\phi(a) + \phi(b))/2$. Ορίζουμε λοιπόν $\phi(0) = 0, \phi(1) = 1$ και εφαρμόζουμε στη $\phi$ τη διαδικασία $T$ στο $[0,1]$. Έτσι, οι τιμές της $\phi$ έχουν οριστεί στο $[1/3, 2/3]$. Έπειτα εφαρμόζουμε τη διαδικασία $T$ στα διαστήματα $[0,1/3], [2/3,1]$. Στα άκρα τους οι τιμές της $\phi$ είναι καθορισμένες από τα προηγούμενα βήματα. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο επ' άπειρον. Με αυτό τον τρόπο καθορίζονται οι τιμές της $\phi$ στο συμπλήρωμα του συνόλου Cantor $C$ (και σε ένα αριθμήσιμο πλήθος σημείων ακόμα). Για τα υπόλοιπα σημεία του $[0,1]$ ορίζουμε $\phi(x) := \sup\{\phi(t) : t < x, t \in [0,1]\backslash C\}$.
(α) Να δειχθεί ότι η $\phi$ είναι αύξουσα και το σύνολο τιμών της είναι πυκνό στο $[0,1]$.
(β) Να δειχθεί ότι η $\phi$ είναι συνεχής και $\phi'(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]\backslash C$.
[Υπόδειξη: Η συνέχεια έπεται από το (α).]
(γ) Ορίζουμε $F(x) = \phi(x)$ για $x \in [0,1]$, $F(x) = 0$ για $x < 0$, και $F(x) = 1$ για $x > 1$. Η $F$ έχει τις ιδιότητες συνάρτησης κατανομής, οπότε υπάρχει μέτρο πιθανότητας $\mu$ στο $\mathbb{R}$ που την έχει ως συνάρτηση κατανομής. Να δειχθεί ότι $\mu([0,1]\backslash C) = 0$.
(δ) Να δειχθεί ότι το $\mu$ δεν έχει άτομα (άρα είναι συνεχής κατανομή) αλλά δεν προκύπτει από πυκνότητα.

# 8

## Τρόποι σύγκλισης τυχαίων μεταβλητών

Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, με τιμές στο $[-\infty, \infty]$. Από τον απειροστικό λογισμό γνωρίζουμε δύο βασικά είδη σύγκλισης της ακολουθίας $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, την κατά σημείο και την ομοιόμορφη. Για ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών, θα ορίσουμε κάποιες νέες, φυσιολογικές έννοιες σύγκλισης ως προς τις οποίες μια ακολουθία είναι ευκολότερο να συγκλίνει και είναι χρήσιμες στις εφαρμογές των πιθανοτήτων στη Στατιστική και αλλού.

**Ορισμός 8.1.** Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών όπως πιο πάνω.

(i) Λέμε ότι η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε μια τυχαία μεταβλητή $X$ **με πιθανότητα 1** ή **σχεδόν βέβαια**, και γράφουμε $X_n \stackrel{\sigma.\beta}{\to} X$, αν

$$\mathbf{P}\Big(\lim_{n\to\infty} X_n = X\Big) = 1,$$

δηλαδή

$$\mathbf{P}\Big(\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\Big) = 1.$$

(ii) Για $p \geq 1$ και $X_n, X \in \mathcal{L}^p$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, λέμε ότι η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στη $X$ **στον** $\mathcal{L}^p$, και γράφουμε $X_n \stackrel{\mathcal{L}^p}{\to} X$, αν

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(|X_n - X|^p) = 0.$$

(iii) Λέμε ότι η $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στη $X$ **κατά πιθανότητα**, και γράφουμε $X_n \stackrel{\mathbf{P}}{\to} X$, αν

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$

για κάθε $\epsilon > 0$.

Αν $X_n \to X$ κατά σημείο, τότε βέβαια $X_n \stackrel{\sigma.\beta.}{\to} X$ αφού $\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\} = \Omega$. Στο επόμενο θεώρημα, βλέπουμε επίσης ότι η σχεδόν βέβαιη σύγκλιση και η σύγκλιση στον $\mathcal{L}^p$ είναι ισχυρότερες από τη σύγκλιση κατά πιθανότητα.

**Θεώρημα 8.2.** *Έστω $X$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τυχαίες μεταβλητές και $p \geq 1$.*

*(i) Αν $X_n \stackrel{\mathcal{L}^p}{\to} X$, τότε $X_n \stackrel{\mathbf{P}}{\to} X$.*

*(ii) Αν $X_n \stackrel{\sigma.\beta.}{\to} X$, τότε $X_n \stackrel{\mathbf{P}}{\to} X$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\epsilon > 0$.
($i$) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Markov, έχουμε

$$\mathbf{P}(|X_n - X| > \epsilon) = \mathbf{P}(|X_n - X|^p > \epsilon^p)|) \leq \frac{1}{\epsilon^p}\mathbf{E}(|X_n - X|^p).$$

Για $n \to \infty$ προκύπτει το ζητούμενο.
($ii$) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(|X_n - X| > \epsilon) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{|X_n - X|>\epsilon}) = \mathbf{E}(g_n),$$

όπου $g_n = \mathbf{1}_{|X_n - X| > \epsilon}$. Η $X_n \overset{\sigma.\beta.}{\to} X$ δίνει $g_n \overset{\sigma.\beta}{\to} 0$. Επίσης $|g_n| \le 1$, άρα από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(g_n) = \mathbf{E}(\lim_{n\to\infty} g_n) = 0.$$

■

**Παράδειγμα 8.3.** (i) Έστω $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathscr{B}([0,1])$ και $\mathbf{P}$ το μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $X = 0$ και για $n \in \mathbb{N}^+$ την τυχαία μεταβλητή

$$X_n(\omega) = \begin{cases} n & \text{αν } \omega \in (0, \frac{1}{n}), \\ 0 & \text{αν } \omega \in [0,1] \setminus (0, \frac{1}{n}). \end{cases}$$

Τότε $X_n(\omega) \to X(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$, άρα $X_n \overset{\sigma.\beta}{\to} X$. Επιπλέον, $X_n \overset{\mathbf{P}}{\to} X$. Όμως $X_n \overset{\mathcal{L}^p}{\nrightarrow} X$ για $p \ge 1$. Πράγματι,

$$\mathbf{E}(|X_n - X|^p) = \mathbf{E}(|X_n|^p) = n^p\,\mathbf{P}(X_n = n) + 0^p\,\mathbf{P}(X_n = 0) = n^p \frac{1}{n} = n^{p-1} \nrightarrow 0.$$

καθώς $n \to \infty$ γιατί $p \ge 1$.

(ii) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ όπως πριν. Για κάθε $k \in \mathbb{N}^+$ χωρίζουμε το $[0,1]$ σε $2^k$ διαδοχικά κλειστά διαστήματα ίδιου μήκους, $J_1^k, J_1^k, \ldots, J_{2^k}^k$. Αριθμούμε τα $\{J_r^k : k \ge 1, 1 \le r \le 2^k\}$ σε μια ακολουθία $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε το $J_{r_1}^{\mu}$ εμφανίζεται νωρίτερα από το $J_{r_2}^{\nu}$ αν $\mu < \nu$ ή αν $\mu = \nu$ και $r_1 < r_2$. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $X_n = \mathbf{1}_{I_n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, για $p \ge 1$,

$$\mathbf{E}(|X_n - 0|^p) = \mathbf{E}(|X_n|^p) = \mathbf{P}(I_n) \to 0 \text{ για } n \to \infty.$$

[Μάλιστα η τελευταία πιθανότητα ανήκει στο διάστημα $[1/(n+2), 2/(n+2))$]. Άρα $X_n \overset{\mathcal{L}^p}{\to} 0$. Συνεπώς, $X_n \overset{\mathbf{P}}{\to} 0$. Όμως η $X_n$ δεν συγκλίνει σε κάποια τυχαία μεταβλητή σχεδόν βέβαια. Πράγματι,

$$\varliminf_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0 < 1 = \varlimsup_{n\to\infty} X_n(\omega)$$

για κάθε $\omega \in \Omega$. Άρα $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} X_n \text{ υπάρχει}) = 0$.

**Θεώρημα 8.4.** *Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και $X$ τυχαία μεταβλητή έτσι ώστε $X_n \overset{\mathbf{P}}{\to} X$. Τότε υπάρχει υπακολουθία $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^+}$ έτσι ώστε $X_{n_k} \overset{\sigma.\beta.}{\to} X$.*

Προσοχή. Η υπακολουθία δεν εξαρτάται από το $\omega \in \Omega$. Δηλαδή υπάρχει μία $(n_k)_{k\ge1}$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών (π.χ. η $n_k = k!$) ώστε σχεδόν για όλα τα $\omega \in \Omega$ να ισχύει $X_{n_k}(\omega) \to X(\omega)$.

*Απόδειξη.* Επιλέγουμε αναδρομικά γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών, $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε

$$\mathbf{P}\left(|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{2^k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}^+$. Αυτό είναι δυνατόν γιατί $X_n \overset{\mathbf{P}}{\to} X$. Θεωρούμε το σύνολο $A_k = \{|X_{n_k} - X| > 1/k\}$, $k \in \mathbb{N}^+$. Τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

Από το πρώτο λήμμα Borel-Cantelli (Θεώρημα 11.1 στο Κεφάλαιο 11), $\mathbf{P}(\limsup_{k\ge1} A_k) = 0$.

Τότε το σύνολο $\Omega \setminus \limsup_{k\ge1} A_k$ έχει πιθανότητα 1 και για $\omega \in \Omega \setminus \limsup_{k\ge1} A_k$ υπάρχει $k(\omega) \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $k \ge k(\omega)$ να ισχύει $\omega \notin A_k$, δηλαδή $|X_{n_k}(\omega) - X(\omega)| \le 1/k$, συνεπώς $X_{n_k}(\omega) \to X(\omega)$. Άρα $X_{n_k} \overset{\sigma.\beta.}{\to} X$. ■

**Θεώρημα 8.5.** *Έστω $p \geq 1$ και $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $X$ όπως στο Θεώρημα 8.4 με την επιπλέον υπόθεση ότι υπάρχει $Y \in \mathcal{L}^p$ ώστε $|X_n| \leq Y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $X \in \mathcal{L}^p$ και $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$.*

*Απόδειξη.* Από το Θεώρημα 8.4 υπάρχει υπακολουθία $(X_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $X_{n_k} \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$. Συνεπώς,

$$\mathbf{E}(|X|^p) = \mathbf{E}(\lim_{n\to\infty} |X_{n_k}|^p) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathbf{E}(|X_{n_k}|^p) \leq \mathbf{E}(|Y|^p),$$

σύμφωνα με το λήμμα Fatou. Άρα $X \in \mathcal{L}^p$.

Έστω ότι $X_n \overset{\mathcal{L}^p}{\nrightarrow} X$. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ και υπακολουθία $(X_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε

$$\mathbf{E}(|X_{\lambda_n} - X|^p) \geq \epsilon \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}. \tag{8.1}$$

Εφόσον $X_{\lambda_n} \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, από το Θεώρημα 8.4, υπάρχει υπακολουθία $(X_{\lambda_{n_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ της $(X_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $X_{\lambda_{n_k}} \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$. Βεβαίως $|X| \leq Y$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, έστω $Z_k = |X_{\lambda_{n_k}} - X|^p$. Η ακολουθία $(Z_k)_{k\geq 1}$ συγκλίνει στο 0 σχεδόν βεβαίως και επειδή [1]

$$|Z_k| \leq 2^p(|X_{\lambda_{n_k}}|^p + |X|^p) \leq 2^p \cdot 2 \cdot Y^p,$$

κυριαρχείται από την $2^{p+1}Y^p$, που έχει πεπερασμένη μέση τιμή αφού $Y \in \mathcal{L}^p$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(Z_n) = \mathbf{E}(\lim_{n\to\infty} Z_n) = 0,$$

το οποίο συγκρούεται με την (8.1). Συνεπώς, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$. ∎

Παρατηρήστε ότι λόγω του Παραδείγματος 8.3(i) η σχεδόν βέβαιη σύγκλιση δεν συνεπάγεται σύγκλιση στον $\mathcal{L}^p$ (για $p \geq 1$). Χρειάζεται να υποθέσουμε κάτι επιπλέον για να πάρουμε αυτή τη σύγκλιση. Επειδή η σχεδόν βέβαιη σύγκλιση συνεπάγεται την κατά πιθανότητα, το προηγούμενο θεώρημα δίνει ότι, όταν $X_n \to X$ σχεδόν βέβαια και υπάρχει $Y \in \mathcal{L}^p$ με $|X_n| \leq Y$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, τότε $X \in \mathcal{L}^p$ και $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$.

Οι συνεχείς συναρτήσεις διατηρούν τη σχεδόν βέβαια σύγκλιση και τη σύγκλιση κατά πιθανότητα. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Πρόταση 8.6.** *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $X$ τυχαίες μεταβλητές.*

*(i) Αν $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$, τότε $f(X_n) \xrightarrow{\sigma.\beta} f(X)$.*

*(ii) Αν $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, τότε $f(X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} f(X)$.*

*Απόδειξη.* (*i*) Έστω $A = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\}$. Τότε $\mathbf{P}(A) = 1$ και για $\omega \in A$ ισχύει ότι $f(X_n(\omega)) \to f(X(\omega))$ εφόσον η $f$ είναι συνεχής. Άρα, αν $B = \{\omega \in \Omega : f(X_n(\omega)) \to f(X(\omega))\}$, έχουμε ότι $A \subset B$, συνεπώς $\mathbf{P}(B) = 1$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο. Σαφώς $A, B \in \mathcal{F}$ (Άσκηση 5.4).

(*ii*) Έστω ότι $f(X_n) \overset{\mathbf{P}}{\nrightarrow} f(X)$. Τότε υπάρχουν $\epsilon > 0$, $\delta > 0$, και γνήσια αύξουσα ακολουθία $(n_k)_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $\mathbf{P}(|f(X_{n_k}) - f(X)| > \epsilon) \geq \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathbf{P}(|f(X_n) - f(X)| > \epsilon) \geq \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, διαφορετικά δουλεύουμε όμοια με την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $Y_n = X_{n_k}$.

Εφόσον $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, από το Θεώρημα 8.4 υπάρχει υπακολουθία $(X_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $X_{\lambda_n} \xrightarrow{\sigma.\beta.} X$. Από το (*i*), $f(X_{\lambda_n}) \xrightarrow{\sigma.\beta.} f(X)$, άρα $f(X_{\lambda_n}) \xrightarrow{\mathbf{P}} f(X)$ το οποίο είναι άτοπο εφόσον $\mathbf{P}(|f(X_{\lambda_n}) - f(X)| > \epsilon) \geq \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, $f(X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} f(X)$. ∎

[1] Χρησιμοποιούμε το ότι $|a+b|^p \leq \{2\max(|a|,|b|)\}^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$.

## Ασκήσεις

**8.1** Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών. Για $\varepsilon > 0$ και $n \geq 1$ θέτουμε $A_n^\varepsilon := \{|X_n| \geq \varepsilon\}$. Να δείξετε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $\mathbf{P}(\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0) = 1$.

(β) $\mathbf{P}(\limsup_{n\geq 1} A_n^\varepsilon) = 0$ για κάθε $\varepsilon > 0$.

**8.2** Για $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές ορίζουμε

$$d(X,Y) := \mathbf{E}\left\{\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right\} \in [0,1].$$

(α) Για $X, Y, Z : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές να δειχθεί ότι

(i) $d(X,Y) = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{P}(X = Y) = 1$.

(ii) $d(X,Y) = d(Y,X)$

(iii) $d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$

(β) Έστω $X, (X_n)_{n\geq 1}$ τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι $X_n \to X$ κατά πιθανότητα αν και μόνο αν $d(X_n, X) \to 0$.

**8.3** (Μοναδικότητα του ορίου) Αν μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει κατά πιθανότητα στην τ.μ. $X$ αλλά και στην τ. μ. $Y$, τότε $X = Y$ με πιθανότητα 1.

**8.4** Έστω $X, (X_n)_{n\geq 1}$ τυχαίες μεταβητές και $s \geq 1$. Αν $X_n \to X$ στον $\mathcal{L}^s$, τότε να δειχθεί ότι

(i) $\mathbf{E}(|X_n|^s) \to \mathbf{E}(|X|^s)$ για $n \to \infty$.

(ii) $X_n \to X$ στον $\mathcal{L}^r$ για κάθε $r \in [1, s]$.

# 9

# Μέτρα γινόμενο

## 9.1 Γινόμενο χώρων μέτρου. Πεπερασμένο πλήθος

Ένα μέτρο $\mu$ σε ένα μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ λέγεται **σ-πεπερασμένο** αν υπάρχει ακολουθία $(C_n)_{n\geq 1}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$ ώστε $\cup_{n=1}^{\infty} C_n = X$ και $\mu(C_n) < \infty$ για κάθε $n \geq 1$. Και τότε ο χώρος $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου.

Το μέτρο Lebesgue στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ όπως και το αριθμητικό μέτρο στον $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ είναι σ-πεπερασμένα, ενώ το αριθμητικό μέτρο στον $(\mathbb{R}, \mathscr{P}(\mathbb{R}))$ δεν είναι.

Έστω τώρα $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ δύο χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Θα ορίσουμε ένα νέο χώρο μέτρου τον οποίο θα ονομάσουμε το γίνομενό τους.

**Μετρήσιμο ορθογώνιο** στον $X \times Y$ λέμε κάθε σύνολο της μορφής $A \times B$ με $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$. Σ-άλγεβρα γινόμενο των $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ονομάζουμε τη σ-άλγεβρα που παράγεται από τα μετρήσιμα ορθογώνια, δηλαδή

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}).$$

Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδικό μέτρο $m$ στον μετρήσιμο χώρο $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ ώστε

$$m(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$. Το $m$ ονομάζεται **μέτρο γινόμενο** των $\mu, \nu$ και θα το συμβολίζουμε με $\mu \times \nu$. Ο χώρος $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ ονομάζεται **χώρος γινόμενο** των $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$.

**Παράδειγμα 9.1.** (i) Έστω $\mu_1$ το αριθμητικό μέτρο στον $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$. Ο χώρος γινόμενο των $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu_1), (\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu_1)$, δηλαδή ο $(\mathbb{N}^2, \mathscr{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu_1 \otimes \mu_1)$, είναι κάτι απλό. Πρώτα $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N}) = \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$ αφού η σ-άλγεβρα γινόμενο περιέχει τα μονοσύνολα $\{(m, n)\} = \{m\} \times \{n\}$ και έπειτα $\mu_1 \otimes \mu_1$ είναι το αριθμητικό μέτρο στον $\mathbb{N}^2$ αφού κάθε μονοσύνολο $\{(m, n)\}$ έχει μέτρο

$$(\mu_1 \otimes \mu_1)(\{m\} \times \{n\}) = \mu_1(\{m\}\mu_1(\{n\}) = 1.$$

(ii) Έστω $\lambda_1$ το μέτρο Lebesgue στον $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Για τον χώρο γινόμενο των $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda_1), (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$ ισχύει ότι $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$, ενώ το μέτρο γινόμενο $\lambda_2 := \lambda_1 \otimes \lambda_1$ είναι το μέτρο που σε κάθε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ δίνει το *εμβαδόν* του. Ονομάζεται μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^2$.

Ανάλογα ορίζεται ο χώρος γινόμενο για πεπερασμένο πλήθος σ-πεπερασμένων χώρων μέτρου $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i), i = 1, 2, \ldots, n$. Το μέτρο γινόμενο $m := \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ είναι το μοναδικό μέτρο στη σ-άλγεβρα γινόμενο με την ιδιότητα

$$m(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \cdots \mu_n(A_n)$$

για κάθε $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_n$.

Το γινομενο του $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$ $n$ φορές με τον εαυτό του δίνει τον $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$. Το μέτρο $\lambda_n := \lambda_1 \otimes \lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_1$ ονομάζεται μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$. Εκτός από τα $\lambda_1, \lambda_2$, γνώριμο είναι και το $\lambda_3$, το οποίο δίνει τον όγκο κάθε Borel υποσυνόλου του $\mathbb{R}^3$.

## 9.2 Ολοκλήρωση σε χώρο γινόμενο

Ένα ολοκλήρωμα ως προς το μέτρο γινόμενο σε ένα χώρο γινόμενο ανάγεται στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων στους χώρους που είναι παράγοντες του γινομένου. Όπως ακριβώς στον απειροστικό λογισμό, όπου υπολογίζουμε ένα διπλό ολοκλήρωμα (στον $\mathbb{R}^2$) με δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις στον $\mathbb{R}$.

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε το ανάλογο αποτέλεσμα στην περίπτωση του γινομένου δύο χώρων σ-πεπερασμένου μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$. Δεν θα δώσουμε όμως τις αποδείξεις για τα θεωρήματα που θα διατυπώσουμε. Οι αποδείξεις ακολουθούν την διαδικασία της τυπικής μηχανής (Παρατήρηση 7.3).

Το επόμενο αποτέλεσμα αφορά τη σ-άλγεβρα γινόμενο. Λέει ότι αν σε μια μετρήσιμη συνάρτηση δύο μεταβλητών σταθεροποιήσουμε τη μία, παίρνουμε μια συνάρτηση μιάς μεταβλητής η οποία είναι πάλι μετρήσιμη.

**Θεώρημα 9.2.** *Έστω $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ μετρήσιμοι χώροι και $f : X \times Y \to [-\infty, \infty]$, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}/\mathscr{B}([-\infty, \infty])$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε*

*(i) Για $x \in X$, η συνάρτηση $y \mapsto f(x, y)$ είναι $\mathcal{B}/\mathscr{B}([-\infty, \infty])$ μετρήσιμη.*

*(ii) Για $y \in Y$, η συνάρτηση $x \mapsto f(x, y)$ είναι $\mathcal{A}/\mathscr{B}([-\infty, \infty])$ μετρήσιμη.*

Το πρώτο αποτέλεσμα για το ολοκλήρωμα ως προς το μέτρο γινόμενο αφορά μη αρνητικές συναρτήσεις.

**Θεώρημα 9.3** (Tonelli)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου, $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ ο χώρος γινόμενο και $f : X \times Y \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε οι συναρτήσεις*

$$x \mapsto \int f(x, y)\, \mathrm{d}\nu(y), \quad y \mapsto \int f(x, y)\, \mathrm{d}\mu(x) \tag{9.1}$$

*είναι $\mathcal{A}/\mathscr{B}([-\infty, \infty])$, $\mathcal{B}/\mathscr{B}([-\infty, \infty])$ μετρήσιμες, αντίστοιχα, και*

$$\int f(x, y)\, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int \Big( \int f(x, y)\, \mathrm{d}\nu(y) \Big) \mathrm{d}\mu(x) = \int \Big( \int f(x, y)\, \mathrm{d}\mu_1(x) \Big) \mathrm{d}\nu_2(y). \tag{9.2}$$

Τα ολοκληρώματα στην (9.1) ορίζονται γιατί από το Θεώρημα 9.2 οι συναρτήσεις τις οποίες ολοκληρώνουμε είναι μετρήσιμες.

Όταν η συνάρτηση την οποία ολοκληρώνουμε δεν διατηρεί απαραίτητα πρόσημο, έχουμε το εξής αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 9.4** (Fubini)**.** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου, $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ ο χώρος γινόμενο και $f : X \times Y \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $\int |f(x, y)|\, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x, y) < \infty$, τότε ισχύουν οι ισχυρισμοί του Θεωρήματος 9.3.*

Από το Θεώρημα Tonelli,

$$\int |f(x, y)|\, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x, y) = \int \int |f(x, y)|\, \mathrm{d}\nu(y)\, \mathrm{d}\mu(x) = \int \int |f(x, y)|\, \mathrm{d}\mu(x)\, \mathrm{d}\nu(y). \tag{9.3}$$

Έτσι, όταν εφαρμόζουμε το Θεώρημα Fubini και θέλουμε να ελέγξουμε αν το ολοκλήρωμα $\int |f(x, y)|\, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu)(x, y)$ είναι πεπερασμένο, ελέγχουμε αν είναι πεπερασμένο κάποιο από τα δύο διαδοχικά ολοκληρώματα στην (9.3).

**Παρατήρηση 9.5.** Συνήθως από το Θεώρημα Fubini χρησιμοποιούμε τη δεύτερη ισότητα στην (9.2), δηλαδή την ισότητα των διαδοχικών ολοκληρωμάτων, για να αλλάξουμε σειρά ολοκλήρωσης. Θα γράψουμε τώρα αυτή την ισότητα όταν τα δύο μέτρα είναι κάποια από τα εξής τρία: το μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$, το αριθμητικό μέτρο στο $\mathbb{N}$ ή ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbf{P}$. Υπό τις προϋποθέσεις του θεωρήματος κάθε φορά, έχουμε τις εξής ισότητες:

(i) Με $a_{n,k} = f(n,k)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k}.$$

(ii) Με $g_n(x) = f(n,x)$,

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx.$$

(iii) Με $X_n(\omega) = f(n,\omega)$,

$$\mathbf{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(X_n).$$

(iv)

$$\mathbf{E}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,\omega)\,dx\right) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{E}(f(x,\omega))\,dx.$$

Εφαρμογές αυτών των ισοτήτων θα δούμε πιο κάτω. Για τώρα θα δούμε μια εφαρμογή της πρώτης.

**Παράδειγμα 9.6.** Για κάθε $n \geq 1$ θέτουμε $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$. Θα δείξουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n(n+1)} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Πράγματι, γράφουμε το άθροισμα ως

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}\frac{1}{k}\mathbf{1}_{k\leq n} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}\frac{1}{k}\mathbf{1}_{k\leq n} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

Στη δεύτερη ισότητα αλλάξαμε σειρά άθροισης, κάτι το οποίο επιτρέπεται καθώς όλοι οι προσθεταίοι είναι μη αρνητικοί (Θεώρημα Tonelli). Στην προτελευταία ισότητα απλώς αθροίσαμε την τηλεσκοπική σειρά.

## 9.3 Γινόμενο χώρων πιθανότητας. Αυθαίρετο πλήθος

Θα ορίσουμε σε αυτή την παράγραφο χώρο γινόμενο αυθαίρετου (ενδεχομένως και άπειρου) πλήθους χώρων μέτρου. Μας ενδιαφέρει μόνο η περίπτωση που είναι όλοι χώροι πιθανότητας.

Έστω λοιπόν σύνολο δεικτών $I \neq \emptyset$ και $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i)$ χώρος πιθανότητας για κάθε $i \in I$. Θεωρούμε τον χώρο γινόμενο

$$\Omega = \prod_{i\in I} \Omega_i = \{(\omega_i)_{i\in I} : \omega_i \in \Omega_i \text{ για κάθε } i \in I\} = \{\omega : I \to \cup_{i\in I}\Omega_i \,\big|\, \omega_i \in \Omega_i \text{ για κάθε } i \in I\}.$$

**Μετρήσιμο κύλινδρο** στο $\Omega$ λέμε κάθε $A \subset \Omega$ της μορφής

$$A = \prod_{i\in I} A_i$$

ώστε $A_i \in \mathcal{F}_i$ για κάθε $i \in I$, και με το σύνολο $J = \{i \in I : A_i \neq \Omega_i\}$ πεπερασμένο.

Δηλαδή ένας μετρήσιμος κύλινδρος είναι καρτεσιανό γινόμενο μετρήσιμων συνόλων, αλλά μόνο πεπερασμένα από αυτά διαφέρουν από τον δειγματικό χώρο του οποίου είναι υποσύνολα. Συμβολίζουμε με $\otimes_{i\in I}\mathcal{F}_i$ τη σ-άλγεβρα που παράγει το σύνολο των μετρήσιμων κυλίνδρων. Δηλαδή θέτουμε

$$\otimes_{i\in I}\mathcal{F}_i := \sigma(\{A \subset \Omega : A \text{ μετρήσιμος κύλινδρος}\}).$$

Για ένα μετρήσιμο κύλινδρο $A$ όπως πριν, ορίζουμε

$$\mathbf{P}(A) := \prod_{i\in I} \mathbf{P}_i(A_i) = \prod_{i\in J} \mathbf{P}_i(A_i).$$

Το πρώτο γινόμενο δεν πρέπει να μας ανησυχεί γιατί, ακόμα και το $I$ να είναι άπειρο, μόνο πεπερασμένοι όροι του γινομένου είναι διαφορετικοί του 1. Η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί ακριβώς παραλείπουμε όρους του γινομένου που είναι σίγουρα 1, δηλαδή αυτούς με $i \in I\backslash J$.

Αποδεικνύεται ότι η $\mathbf{P}$ επεκτείνεται μοναδικά σε μέτρο πιθανότητας στη σ-άλγεβρα $\otimes_{i\in I}\mathcal{F}_i$. Ονομάζουμε αυτή την επέκταση **μέτρο γινόμενο** των $(\mathbf{P}_i)_{i\in I}$ και το συμβολίζουμε με $\otimes_{i\in I}\mathbf{P}_i$. Αν το $I$ είναι πεπερασμένο, έστω $I = \{1, 2, \dots, n\}$, το συμβολίζουμε με $\mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{P}_n$.

Έχουμε λοιπόν ορίσει ένα νέο χώρο πιθανότητας, το **χώρο γινόμενο**

$$\Big(\prod_{i\in I} \Omega_i, \otimes_{i\in I}\mathcal{F}_i, \otimes_{i\in I}\mathbf{P}_i\Big)$$

των $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i) : i \in I\}$. Η χρησιμότητά του θα φανεί στην Παράγραφο 10.4.

**Παράδειγμα 9.7** (Ένας υπολογισμός σε χώρο γινόμενο)**.** Θεωρούμε το πείραμα ρίψης ενός νομίσματος άπειρες (αριθμήσιμες) φορές που φέρνει $K$ με πιθανότητα $p \in (0, 1)$. Ας δούμε το χώρο πιθανότητας του πειράματος.

Για $i = 1, 2, 3, \dots$ η $i$–οστή ρίψη έχει χώρο πιθανότητας $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i) = (\{K, \Gamma\}, \mathscr{P}(\{K, \Gamma\}), \mathbf{P}^p)$, όπου $\mathbf{P}^p$ το μέτρο με $\mathbf{P}^p(\{K\}) = p$ και $\mathbf{P}^p(\{\Gamma\}) = 1 - p$. Ο χώρος πιθανότητας για όλο το πείραμα είναι ο χώρος γινόμενο των $\{(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbf{P}_i) : i \in \mathbb{N}^+\}$.

Ας υπολογίσουμε τώρα την πιθανότητα στις ρίψεις 2, 3 και 5 το αποτέλεσμα να είναι $K, K, \Gamma$ αντίστοιχα. Το ενδεχόμενο είναι ο μετρήσιμος κύλινδρος

$$A = \{K, \Gamma\} \times \{K\} \times \{K\} \times \{K, \Gamma\} \times \{\Gamma\} \times \prod_{i\geq 6} \Omega_i.$$

Άρα

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}_2(\{K\})\, \mathbf{P}_3(\{K\})\, \mathbf{P}_5(\{\Gamma\}) = p^2(1 - p).$$

## Ασκήσεις

**9.1** Έστω $(q_k)_{k\geq 1}$ μια αρίθμηση των ρητών του $(0, 1)$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ ως

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sqrt{|x - q_n|}}.$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι το μέτρο Lebesgue των σημείων του $(0, 1)$ στα οποία η $f$ απειρίζεται είναι 0, δηλαδή ότι η $f$ είναι σχεδόν παντού πεπερασμένη.
[Υπόδειξη: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της $f$ στο $(0, 1)$ ως προς το μέτρο Lebesgue.]

**9.2** Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0, \infty)$.
(α) Για $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(g(X)) = g(0) + \int_0^{\infty} g'(t)\, \mathbf{P}(X > t)\, dt,$$

υποθέτοντας ότι $g' \geq 0$ ή ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει απολυτα.
(β) Για $p > 0$ ισχύει

$$\mathbf{E}(X^p) = p \int_0^{\infty} t^{p-1}\, \mathbf{P}(X > t)\, dt,$$

και επιπλέον, αν η $X$ παίρνει ακέραιες μη αρνητικές τιμές, τότε

$$\mathbf{E}(X^p) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geq k)(k^p - (k - 1)^p).$$