27/9/13

Ασκήσεις και Εφαρμογές στον Πολλ/κό Νόμο

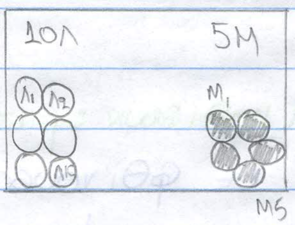
1. Πολλ/κός Νόμος

$E_1, E_2, \ldots, E_n \subseteq \Omega$ με $P(E_1E_2E_3\ldots E_n)>0$

$\Downarrow$

$$P(E_1E_2\ldots E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2)\ldots P(E_n|E_1E_2\ldots E_{n-1})$$

2. Παραδείγματα



$\rightarrow$ Εξαγωγή 4 σφαιριδίων χωρίς επανάθεση

$P(1^o Λ, 2^o Μ, 3^o Μ, 4^o Λ) = P_{ζητούμενο}$

1η λύση (Συνδυαστική - Διατάξεις)

$$P_{ζητ.} = \frac{ευνοϊκές}{δυνατές} = \frac{10\cdot 5\cdot 4\cdot 9}{(15)_4}$$

2η λύση (Πολλ/κός Νόμος)

$$P_{ζητ.} = P(1^o Λ)\cdot P(2^o Μ|1^o Λ)\, P(3^o Μ|1^o Λ, 2^o Μ)\, P(4^o Λ|1^o Λ, 2^o Μ, 3^o Μ)$$

$$= \frac{10}{15}\,\frac{5}{14}\,\frac{4}{13}\,\frac{9}{12}$$

3. Παράδειγμα

Θέατρο → 1 σειρά 7 καθισμάτων, έρχονται 7 θεατές
κάθε θεατής ονομάζεται με τη σειρά άφιξης του.

7	2	6	1	4	3	5	×
7	4	1	2	3	5	6	✓
7	6	5	1	2	3	4	✓
7	5	3	1	2	4	6	✓

1η λύση (Συνδυαστική)

$P_{ζητ.}$ = P(να καθίσουν όλοι χωρίς να χρειαστεί να περάσει κάποιος μπροστά από τον άλλο).

$$P_{ζητ.} = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}}$$

↱ καθορίζεται από το ποιοι θα καθίσουν αριστερά

Ευνοϊκή Μετάθεση: οι θεατές αριστερά του 1 σε φθίνουσα σειρά και οι θεατές δεξιά του 1 σε αύξουσα σειρά.

Ευνοϊκές με τον 1 στην 1η θέση $= 1 = \binom{6}{0}$
Ευνοϊκές με τον 1 στην 2η θέση $= 6 = \binom{6}{1}$
Ευνοϊκές με τον 1 στην 3η θέση $= \binom{6}{2}$
Ευνοϊκές με τον 1 στην 4η θέση $= \binom{6}{3}$
Ευνοϊκές με τον 1 στην 5η θέση $= \binom{6}{4}$
Ευνοϊκές με τον 1 στην 6η θέση $= \binom{6}{5}$
Ευνοϊκές με τον 1 στην 7η θέση $= \binom{6}{6} = 1$

ευνοϊκών $\sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} = 2^6$

$$P_{ζητ.} = \frac{2^6}{7!}$$

$2^{η}$ λύση (Πολλ/κος Νόμος)

Ο τελευταίος πρέπει να καθίσει σε κάποια άκρη.
Ο προ-τελευταίος πρέπει να καθίσει σε κάποια από τις νέες άκρες
⋮

$$P_{ζητ} = \frac{2}{7}\,\frac{2}{6}\,\frac{2}{5}\,\frac{2}{4}\,\frac{2}{3}\,\frac{2}{2} = \frac{2^6}{7!}$$

4. Παράδειγμα

n άτομα, $n \leq 365$

$1^{η}$ λύση (Συνδυαστική)

$$P(\text{όλοι γενέθλια σε διαφορετικές μέρες}) = \frac{(365)_n}{365^n}$$

$2^{η}$ λύση (Πολλ/κος Νόμος)

$2^{ος}$ διαφορετική μέρα από $1^{ο}$

$$P_{ζητ.} = \underbrace{\frac{364}{365}\,\frac{363}{365}\cdots\frac{365-(n-1)}{365}}_{n-1\text{ όροι}} = \frac{(364)_{n-1}}{365^{n-1}}$$

5. Παράδειγμα

A 2 3 ... 10 J Q K

♣
♢
♡
♠

→ Μοιράζεται σε 4 X 13

↑ ΠΑΙΧΤΕΣ ↑ ΦΥΛΛΑ

$P_{ζητ.} = P($κάθε παίχτης παίρνει 1 Άσσο$) = ;$

Αποτέλεσμα = Δειγματικό σημείο = $(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{φύλλα } 1^{ου}}}{A_1}, A_2, A_3, A_4)$

1ος τρόπος (Συνδυαστικός)

$$P_{ζητ.} = \frac{\text{ευνοϊκές}}{\text{δυνατές}} = \frac{4!\binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}} = \frac{4! \cdot \dfrac{48!}{12!\,12!\,12!\,12!}}{\dfrac{52!}{13!\,\cancel{39!}}\,\dfrac{\cancel{39!}}{13!\,\cancel{26!}}\,\dfrac{\cancel{26!}}{13!\,\cancel{13!}}\,\dfrac{\cancel{13!}}{13!\,0!}}$$

$$P_{ζητ.} = \frac{13^4 \cdot 4!}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} = \frac{3! \; 13^3}{51 \cdot 50 \cdot 49}$$

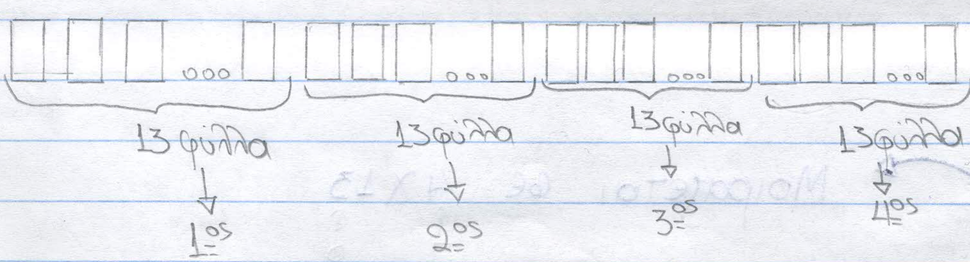
2ος τρόπος (Συνδυαστικός/Πολλ/κός Νόμος)

$$P_{ζητ.} = P(\underbrace{\text{ο } 1^{ος} \text{ παίρνει Α}}_{E_1}, \text{ κ' } \underbrace{\text{ο } 2^{ος} \text{ παίρνει Α}}_{E_2}, \text{ κ' } \underbrace{\text{ο } 3^{ος} \text{ παίρνει Α}}_{E_3}, \text{ κ' } \underbrace{\text{ο } 4^{ος} \text{ παίρνει Α}}_{E_4})$$

$$= \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} \cdot \frac{\binom{3}{1}\binom{36}{12}}{\binom{39}{13}} \cdot \frac{\binom{2}{1}\binom{24}{12}}{\binom{26}{13}} \cdot \frac{\binom{1}{1}\binom{12}{12}}{\binom{13}{13}}$$

3ος Τρόπος (Πολλ/κός Νόμος)

Μοιρασιά ⇝ Μετάθεση των 52 φύλλων.



$P_{ζητ.} = P($ ο Α♦ να πέσει σε άλλον από αυτόν που πήρε το Α♣, ο Α♥ να πέσει σε άλλον από αυτόν που πήρε το ♣,♦, ο Α♠ ... $) = \frac{39}{51}$

$$= \frac{39}{51} \cdot \frac{26}{50} \cdot \frac{13}{49} = \frac{3!\,13^3}{51 \cdot 50 \cdot 49}$$

6. Παράδειγμα

$$P(\text{εξάρι στο Λόττο με 49 νούμερα}) = \frac{\binom{6}{6}\binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{\binom{49}{6}}$$

Με Πολλ/κό Νόμο

$P($νούμερο του δελτίου μου στο 1º μπαλάκι, ... 2º μπαλάκι, ...$) =$

$$= \frac{6}{49}\,\frac{5}{48}\,\frac{4}{47}\,\frac{3}{46}\,\frac{2}{45}\,\frac{1}{44} = \frac{6!}{\binom{49}{6}}$$

$$P(\text{πεντάρι στο Λόττο με 49 νούμερα}) = \frac{6}{49}\,\frac{5}{48}\,\frac{4}{47}\,\frac{3}{46}\,\frac{2}{45}\,\frac{43}{44} \cdot 6$$

χάλασει στο τελευταίο μπαλάκι

7. Παράδειγμα

Οικογένεια με 2 παιδιά

$P_1 = P($έχει 2 κορίτσια / έχει 1 τουλάχιστον κορίτσι$)$

$P_2 = P($έχει 2 κορίτσια / το πρωτότοκο είναι κορίτσι$)$

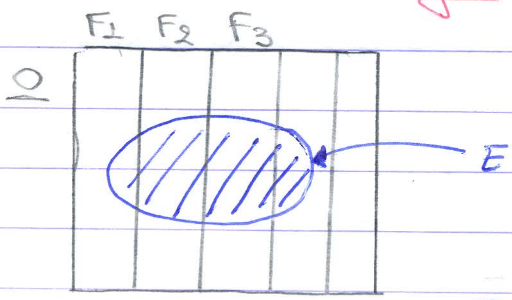
$$P_1 = P(\{κκ\} \mid \{κκ, κα, ακ\}) = \frac{1}{3}$$

$$P_2 = P(\{κκ\} \mid \{κκ, κα\}) = \frac{1}{2}$$

7ο Μάθημα 1/3/13

Ασκήσεις και Εφαρμογές
Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας
Νόμος του Bayes

① Θ.Ο.Π. – Ν. Bayes

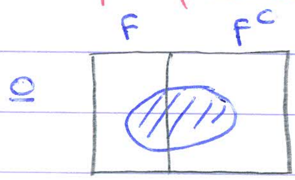


$$P(E) = P\left(E \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} EF_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(EF_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i)P(E|F_i)$$

$E \subseteq \Omega$, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ ← ασυμβίβαστα

Ειδική περίπτωση:



$$P(E) = P(F)P(E|F) + P(F^c)P(E|F^c)$$

Ν. Bayes:

$P(E|F) \longleftrightarrow P(F|E)$

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)} = \frac{P(E).P(F|E)}{P(F)}$$

② Παράδειγμα!

Ασφαλιστική Εταιρεία

$$\text{κάθε ασφαλισμένος} \begin{cases} \xrightarrow{30\%} \text{επιρρεπής σε ατύχημα} \\ \xrightarrow{70\%} \text{μη-επιρρεπής σε ατύχημα} \end{cases}$$

$P(\underset{\overset{\shortparallel}{\in}}{\text{προκαλ. ατύχημα}} \mid \underset{\overset{\shortparallel}{F}}{\text{επιρρεπής}}) = 0,4$

$P(\text{ — '' — } \mid \underset{\overset{\shortparallel}{F^c}}{\text{μη επιρρεπής}}) = 0,2$

Πείραμα τύχης: Επιλογή ασφαλισμένου κ' προκαλεί ατυχ/όχι

$p_1 = P(\text{επιρ. κ' προκαλεί ατύχημα}) = ;$

$p_2 = P(\text{προκαλεί ατύχημα}) = ;$

$p_3 = P(\text{επιρρεπής} \mid \text{προκαλ. ατυχ.}) = ;$

$p_1 = P(F\in) = P(F)\cdot P(\in|F) = \boxed{P(\in)\cdot P(F|\in)} \overset{*}{=} 0,3 \times 0,4 = 0,12$

(*) $P(F) = 0,3$
$P(F^c) = 0,7$
$P(\in|F) = 0,4$
$P(\in|F^c) = 0,2$

πρέπει να έχουν άθροισμα 1!

$p_2 = P(\in) = P(F)\cdot P(\in|F) + P(F^c)\cdot P(\in|F^c)$
$= 0,3 \times 0,4 + 0,7 \times 0,2 = 0,26$

$p_3 = P(F|\in) \overset{N.B.}{=} \dfrac{P(F)\cdot P(\in|F)}{P(\in)} = \dfrac{0,3\times 0,4}{0,26} = \dfrac{12}{26}$

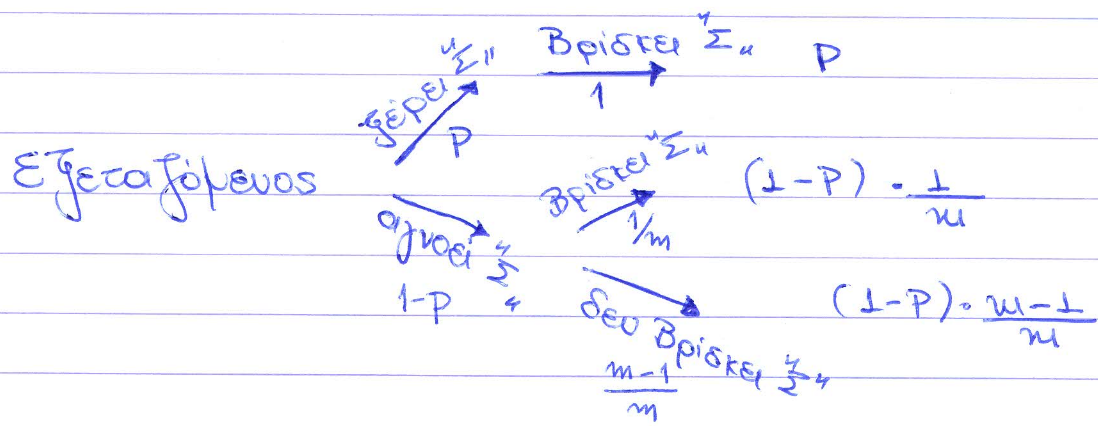
③ Παράδειγμα

Τεστ με 1 ερώτηση πολλαπλής επιλογής.
m επιλογές: 1 "Σ" + $m-1$ "Λ"

Ποσοστό των εξεταζομένων που γνωρίζουν τη "Σ" $= P$

Ποσοστό που μαντεύει $= 1-P$

$p_1 = P($ένας εξεταζόμενος να βρει τη "Σ"$) = ;$
$p_2 = P($να ήξερε τη "Σ" $|$ βρήκε τη "Σ"$) = ;$



$$P_1 \overset{\text{Θ.Ο.Π.}}{=} P(\text{ξέρει})\, P(\text{Βρίσκει} \mid \text{ξέρει}) + P(\text{δεν ξέρει})\, P(\text{Βρίσκει} \mid \text{δεν ξέρει})$$
$$= P \cdot 1 + (1-P)\frac{1}{m}$$

$$P_2 = P(\text{ήξερε} \mid \text{Βρήκε}) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(\text{ξέρει}) \cdot P(\text{Βρήκε} \mid \text{ήξερε})}{P(\text{Βρήκε})} =$$

$$= \frac{P \cdot 1}{P \cdot 1 + (1-P)\frac{1}{m}} = \frac{m \cdot P}{(m-1)P + 1}.$$

④ Παράδειγμα (Sanford)

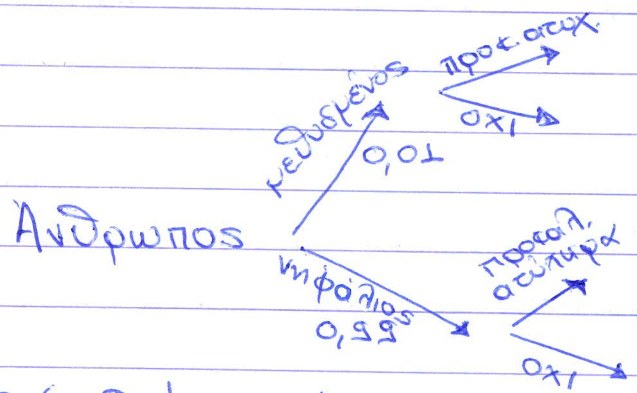
Πολιτικός A : Να καταργηθούν τα πρόστιμα για οδήγηση σε κατάσταση μέθης.

Επιχειρηματολογία: Μόνο το 10% των ατυχημάτων γίνονται από μεθυσμένους οδηγούς

Πολιτικός B : Όχι.

επιχειρηματολογία: Μόνο 1% οδηγών οδηγούν μεθυσμένοι.

— • —



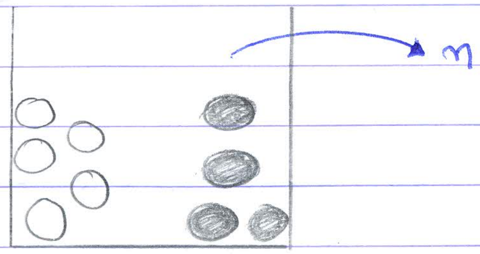
$P(\text{μεθ.}|\text{ατυχ.}) = 0,1$

$$\frac{P(\text{ατυχ.}|\text{μεθ.})}{P(\text{ατυχ.}|\text{νηφάλιος})} = \frac{\frac{\cancel{P(\text{ατυχ.})}}{P(\text{μεθ.})}\cdot P(\text{μεθ.}|\text{ατυχ.})}{\frac{\cancel{P(\text{ατυχ.})}}{P(\text{νηφ.})}\cdot P(\text{νηφ.}|\text{ατυχ.})} =$$

$$= \frac{\frac{0,1}{0,01}}{\frac{0,9}{0,99}} = 11$$

⑤ Παράδειγμα

$w+b$ σφαιρίδια



Επιλογή n σφαιριδίων από τα $w+b$ χωρίς επανάθεση ($n \le w+b$)

w λευκά   b Μαύρα

$$p_1 = P(1^o\,Λ \text{ και συνολικά } k\,Λ) = ;$$
$$p_2 = P(\text{συνολικά } k\,Λ) = ;$$
$$p_3 = P(1^o\,Λ \mid \text{συνολικά } k\,Λ) = ;$$

$$p_1 = P(1^o Λ)\cdot P(\text{συνολικά } k\,Λ \mid 1^o Λ) = \frac{w}{w+b}\cdot\frac{\binom{w-1}{k-1}\binom{b}{n-k}}{\binom{w+b-1}{n-1}}$$

$$p_2 = \frac{\binom{w}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{w+b}{n}}$$

$$p_3 \overset{\text{N.Bayes}}{=} \frac{P(1^o Λ)\,P(\text{συνολ. } k\,Λ \mid 1^o Λ)}{P(\text{συνολ. } k\,Λ)} =$$

$$= \frac{\frac{w}{w+b}\cdot\binom{w-1}{k-1}\cdot\cancel{\binom{b}{n-k}}\Big/\binom{w+b-1}{n-1}}{\frac{\binom{w}{k}\cancel{\binom{b}{n-k}}}{\binom{w+b}{n}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_3 = \frac{\frac{\cancel{w}}{\cancel{w+b}}\cdot\cancel{\binom{w-1}{k-1}}\Big/\binom{w+b-1}{n-1}}{\cancel{w}/k\cdot\cancel{\binom{w-1}{k-1}}\Big/\frac{\cancel{w+b}}{n}\cdot\binom{w+b-1}{n-1}} = \frac{k}{n}$$

(6) Παράδειγμα

Πείραμα τύχης
- Ρίψη ζαριού
- Ρίψη νομίσματος όσες φορές δείξει το ζάρι

$$\underbrace{P(\text{να εμφ. μόνο Γ})}_{E} = \sum_{i=1}^{6} \underbrace{P(\text{το ζάρι φέρνει } i)}_{P(F_i)} \underbrace{P\left(\text{εμφ. μόνο Γ} \,\middle|\, \text{το ζάρι έφερε } i\right)}_{P(E|F_i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{6}}{1-\frac{1}{2}} = \ldots$$

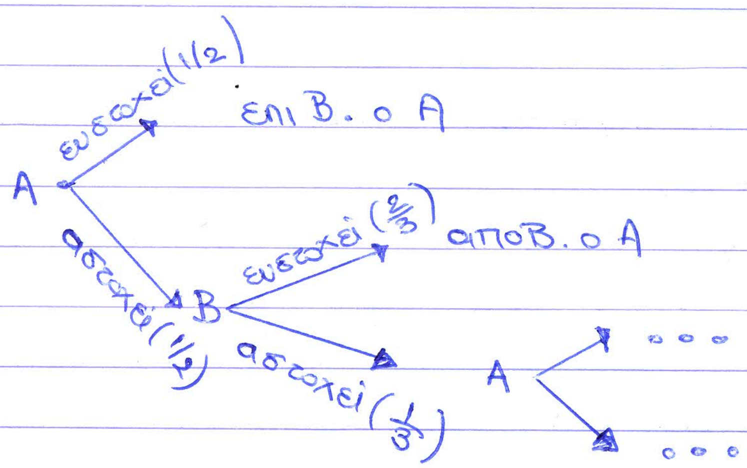
(7) Παράδειγμα

A, B μονομαχούν, ρίχνοντας εναλλάξ

$P(\text{ευστοχίας } A) = \frac{1}{2}$

$P(\text{ευστοχίας } B) = \frac{2}{3}$

$P(\text{επιβίωσης του } A \mid \text{άρχισε ο } A) = ;$



Ενδεχόμενα

F_1: Ευστοχεί ο Α στην $1^{η}$

F_2: Αστοχεί ο Α στην $1^{η}$
Ευστοχεί ο Β στην $2^{η}$

F_3: Αστοχεί ο Α στην $1^{η}$
Αστοχεί ο Β στην $2^{η}$

Ε: επιβίωσε ο Α

$$P(E) = P(F_1)\cdot P(E|F_1) + P(F_2)\cdot P(E|F_2) + P(F_3)\cdot P(E|F_3) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot P(E) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{5}{6}P(E) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(E) = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

⑧ ΟΡΙΣΜΟΣ

Λόγος πιθανοφάνειας ενός ενδεχομένου $A \subseteq \Omega$ (odds) ορίζεται το πηλίκο $\frac{P(A)}{P(A^c)}$ (πόσο πιθανότερο είναι να συμβεί το Α από το να μην συμβεί)

Νόμος του Bayes (για odds ενός Α)

$$\underbrace{\frac{P(A|E)}{P(A^c|E)}}_{\text{odds του A μετά την πληροφορία E}} = \left[\frac{\frac{P(A)\cdot P(E|A)}{P(E)}}{\frac{P(A^c)\cdot P(E|A^c)}{P(E)}}\right] = \underbrace{\frac{P(A)}{P(A^c)}}_{\text{αρχικά odds του A}}\cdot\frac{P(E|A)}{P(E|A^c)}$$

9ο Μάθημα

Ασκήσεις Δεσμευμένη Πιθανότητα - Ανεξαρτησία

① Άσκηση

Οικογένεια με 2 παιδιά

$P_1 = P$ (το άλλο K | το ένα παιδί K) = ;

$P_2 = P$ (το άλλο K | το πρωτότοκο K) = ;

$P_3 = P$ (το άλλο K | ανοίγει την πόρτα K) = ;

Λύση

G_1 : το πρωτότοκο K

G_2 : το δευτερότοκο K

H : το παιδί που ανοίγει την πόρτα είναι K

Άρα

$$P_1 = P(G_1 G_2 \mid G_1 \cup G_2)$$

$$P_2 = P(G_2 \mid G_1)$$

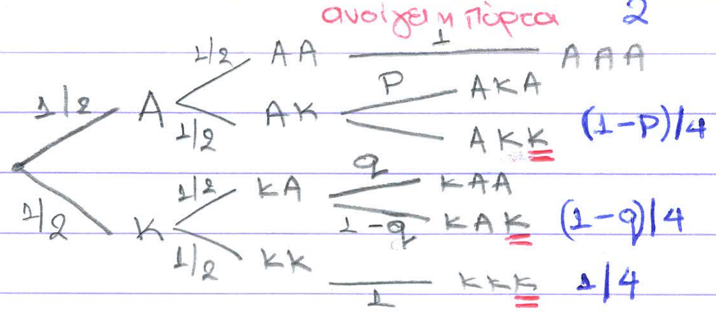
$$P_3 = P(G_1 G_2 \mid H)$$

$$P_1 = \frac{P(G_1 G_2)}{P(G_1 \cup G_2)} = \frac{P(G_1)P(G_2)}{P(G_1)+P(G_2)-P(G_1 G_2)}$$

G_1, G_2 ανεξ.

$$= \frac{P(G_1)P(G_2)}{P(G_1)+P(G_2)-P(G_1)\cdot P(G_2)} = \frac{1/2 \cdot 1/2}{1/2 + 1/2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P_2 = P(G_2 \mid G_1) = P(G_2) = \frac{1}{2}$$



$$P_3 = P(G_1 G_2 \mid H) = \frac{P(G_1 G_2 H)}{P(H)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1-P}{4}+\frac{1-q}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{3-P-q}$$

Π.χ. (Διαφορές ανάλογα με την πολιτική της οικογένειας)

Αν ρίχνουν νόμισμα (δίκαιο) για το ποιος θα ανοίξει την πόρτα

$$p = q = \frac{1}{2} \Rightarrow P_3 = \frac{1}{3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Αν το αγόρι ανοίγει πάντα (εφόσον υπάρχει αγόρι)

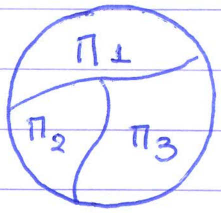
$$p = 1,\ q = 1 \Rightarrow P_3 = \frac{1}{3-1-1} = 1$$

Αν το πρωτότοκο ανοίγει πάντα

$$p = 1,\ q = 0 \Rightarrow P_3 = \frac{1}{3-1-0} = \frac{1}{2}$$

② Άσκηση

Αεροπλάνο έχει πέσει σε 1 από 3 περιοχές



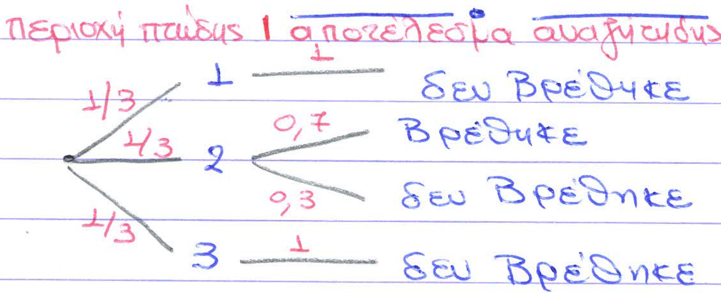
$$P(\text{έχει πέσει στην } i) = \frac{1}{3} \qquad i = 1, 2, 3$$

$$P\left(\text{Βρεθεί} \,\middle|\, \begin{array}{l}\text{έχει πέσει} \\ \text{στην } i \text{ και} \\ \text{ψάχνουμε στην } i\end{array}\right) = B_i$$

$$B_1 = 30\%, \quad B_2 = 70\%, \quad B_3 = 10\%$$

Έστω ότι ψάχνουμε στη 2 περιοχή.

$$P(\underbrace{\text{έπεσε στη 2}}_{\substack{\text{περιοχή} \\ \text{πτώσης}}} \mid \underbrace{\text{δεν βρέθηκε}}_{\substack{\text{αποτέλεσμα} \\ \text{αναζήτησης}}}) = ;$$



Άρα

$$P(\text{έπεσε στη 2} \mid \text{δεν βρέθηκε}) = \frac{P\left(\begin{array}{c}\text{έπεσε} \\ \text{στη 2}\end{array}\right) P\left(\begin{array}{c}\text{δεν} \\ \text{βρέθηκε}\end{array} \,\middle|\, \begin{array}{c}\text{έπεσε} \\ \text{στη 2}\end{array}\right)}{P\left(\begin{array}{c}\text{δεν} \\ \text{βρέθηκε}\end{array}\right)}$$

$$= \frac{(1/3) \cdot 0,3}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,3 + \frac{1}{3} \cdot 1} = \frac{0,3}{1 + 0,3 + 1} = \frac{0,3}{2,3}$$

③ Άσκηση

Οι Α,Β ρίχνουν εναλλάξ νόμισμα (Πιθαν. να φέρει Κ $\to p$)
κερδίζει ο 1ος που φέρνει Κ.
Αρχίζει ο Α.
P(κερδίζει ο Α) = ;

1ος τρόπος

E : κερδίζει ο Α
A_i : για πρώτη φορά έρχεται Κ στην i ρίψη.

$$E = A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup \dots \Rightarrow P(E) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_{2i+1})$$

$A_1, A_3, \dots$ Ασυμβίβ.

$$P(A_i) = (1-p)^{i-1} p$$

$$P(E) = \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^{2i} p = p \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left((1-p)^2\right)^i =$$

$$= p \cdot \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p}$$

2ος τρόπος

E : κερδίζει ο Α
B_1 : η πρώτη ρίψη να είναι Κ

Άρα

$$P(E) = \underbrace{P(B_1)}_{p} \cdot \underbrace{P(E|B_1)}_{1} + \underbrace{P(B_1^c)}_{1-p} \cdot \underbrace{P(E|B_1^c)}_{1-P(E) = P(E^c)} \Rightarrow$$

$$P(E) = p + (1-p)(1-P(E)) \Rightarrow P(E) = p + 1 - p - (1-p)P(E) \Rightarrow$$

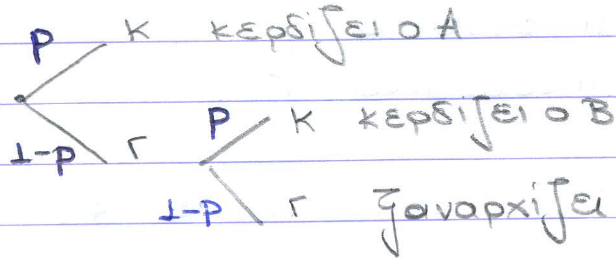
$$\Rightarrow (2-p)P(E) = 1 \Rightarrow P(E) = \frac{1}{2-p}$$

$3^{ος}$ τρόπος

E: κερδίζει ο A

A_1: η K έρχεται για πρώτη φορά στην $1^{η}$ ρίψη

A_2: — " — — " — $2^{η}$ ρίψη



$$P(E) = P(A_1)\cdot P(E|A_1) + P(A_1^c)\,P(E|A_1^c)$$

$$= p\cdot 1 + \underbrace{P(A_1^c A_2)}_{(1-p)p}\ \underbrace{P(E|A_1^c A_2)}_{=0} + \underbrace{P(A_1^c A_2^c)}_{(1-p)^2}\ \underbrace{P(E|A_1^c A_2^c)}_{P(E)}$$

$$= p + (1-p)^2 P(E) \iff$$

$$\iff P(E) = \frac{p}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p}$$

④ Άσκηση

Τρεις παίκτες με 3 διαφορετικά νομίσματα

A $\longrightarrow$ k με πιθανότητα P
B $\longrightarrow$ k με πιθανότητα q
Γ $\longrightarrow$ k με πιθανότητα r

Ρίχνουν A, B, Γ, A, B, Γ ... μέχρι την 1η k.

P(κερδίζει ο A) = ;

1ος τρόπος
E: κερδίζει ο A
Ai: έρχεται "k" για πρώτη φορά στην i ρίψη

$$E = A_1 \cup A_4 \cup A_7 \cup \ldots \Rightarrow P(E) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_{3i+1})$$

$$P(A_{3i+1}) = P(\{\underbrace{\overset{}{\underset{(1-p)}{\Gamma}}\underset{(1-q)}{\Gamma}\underset{(1-r)}{\Gamma}\ \overset{(1-p)}{\Gamma}\overset{(1-q)}{\Gamma}\overset{(1-r)}{\Gamma} \ldots \Gamma\Gamma\Gamma}_{i\text{-τριάδες}}\underset{P}{k}\})$$

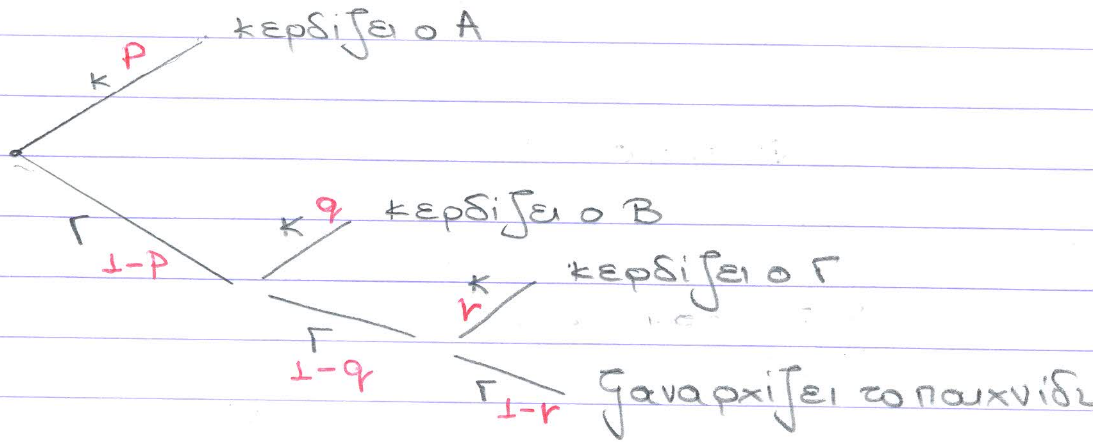
$$= ((1-p)(1-q)(1-r))^i \cdot P \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(E) = P\sum_{i=0}^{\infty}((1-P)(1-q)(1-r))^i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{P}{1-(1-P)(1-q)(1-r)}$$

$2^{ος}$ τρόπος

E : κερδίζει ο A



F_1 : η $1^η$ ρίψη Κ

F_2 : η $2^η$ ρίψη Κ

F_3 : η $3^η$ ρίψη Κ

(οδηγός το δένδρο)

$$P(E) = P(F_1)\cdot P(E|F_1) + P(F_1^c F_2)\, P(E|F_1^c F_2) + P(F_1^c F_2^c F_3)\, P(E|F_1^c F_2^c F_3) + P(F_1^c F_2^c F_3^c)\, P(E|F_1^c F_2^c F_3^c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(E) = p \cdot 1 + \cancel{(1-p)q\cdot 0} + \cancel{(1-p)(1-q)r\cdot 0} + (1-p)(1-q)(1-r)\cdot P(E) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(E) = \frac{p}{1-(1-p)(1-q)(1-r)}$$